

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Сыров Игорь Анатольевич  
Должность: Директор  
Дата подписания: 28.03.2025 16:47:16  
Уникальный программный ключ:  
b683afe664d7e9f64175886cf9626a198149ad36

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

Стерлитамакский филиал

Колледж

**Рабочая программа дисциплины**

дисциплина

***ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика***

***Математический и общий естественнонаучный цикл, обязательная часть***

цикл дисциплины и его часть (обязательная, вариативная)

специальность

***09.02.07***

***Информационные системы и программирование***

код

наименование специальности

квалификация

***Специалист по информационным системам***

Год начала подготовки

2025

Разработчик (составитель)

***преподаватель высшей категории***

***Дмитриева С.Г.***

ученая степень, ученое звание,  
категория, Ф.И.О.

Стерлитамак 2025

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                                                                                                                                   |                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| <b>1. ПАСПОРТ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ .....</b>                                                                                                                                                                              | <b>3</b>                                |
| 1.1. Область применения рабочей программы .....                                                                                                                                                                                   | 3                                       |
| 1.2. Место учебной дисциплины в структуре основной образовательной программы .3                                                                                                                                                   |                                         |
| <b>2. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ .....</b>                                                                                                                                                                                 | <b>4</b>                                |
| 2.1 Объем дисциплины и виды учебной работы .....                                                                                                                                                                                  | 4                                       |
| 2.2. Тематический план и содержание дисциплины.Ошибка! Закладка не определена.                                                                                                                                                    |                                         |
| <b>3. ФОРМЫ КОНТРОЛЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, ИМЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ОПЫТА, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ...8</b>                                               |                                         |
| <b>4. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ДИСЦИПЛИНЫ.....</b>                                                                                                                                                                                      | <b>Ошибка! Закладка не определена.8</b> |
| 4.1. Требования к минимальному материально-техническому обеспечению .....                                                                                                                                                         | 8                                       |
| 4.2. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля) .....                                                                                                                                                   | Ошибка! Закладка не определена.         |
| 4.2.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля) .....                                                                                                                  | 8                                       |
| 4.2.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (далее - сеть «Интернет»), необходимых для освоения дисциплины (модуля) .....                                                                         | 9                                       |
| 4.2.3. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)..... | 10                                      |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ 1 .....</b>                                                                                                                                                                                                         | <b>11</b>                               |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ 2 .....</b>                                                                                                                                                                                                         | <b>13</b>                               |

## 1. ПАСПОРТ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ

### 1.1. Область применения рабочей программы

Рабочая программа общеобразовательной учебной дисциплины является частью основной образовательной программы в соответствии с ФГОС для специальности: 09.02.07 Информационные системы и программирование, для обучающихся *очной* формы обучения.

### 1.2. Место учебной дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина относится к математическому и общему естественнонаучному циклу. Дисциплина реализуется в рамках обязательной части

### 1.3. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины:

| Код ОК, ПК                                                                                                            | Умения                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Знания                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ОК 01<br>выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам           | распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части; определять этапы решения задачи; выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы; составить план действия; определить необходимые ресурсы; владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах; реализовать составленный план; оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника) | актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить; основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте; алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях; методы работы в профессиональной и смежных сферах; структуру плана для решения задач; порядок оценки результатов решения задач профессиональной деятельности |
| ОК 02<br>Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для | определять задачи для поиска информации; определять необходимые источники информации; планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию; выделять наиболее значимое в перечне информации; оценивать практическую значимость результатов                                                                                                                                                                                                                                                                                   | номенклатуры информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности; приемы структурирования информации; формат оформления результатов поиска информации                                                                                                                                                                                                                                                                   |

|                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| выполнения задач профессиональной деятельности.                                                                                                                | поиска; оформлять результаты поиска                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| ОК 04<br>Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде                                                                                        | организовывать работу коллектива и команды; взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | психологические основы деятельности коллектива, психологические особенности личности; основы проектной деятельности                                                                                                                                                                                                                              |
| ОК 05<br>Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста | грамотно излагать свои мысли и оформлять документы по профессиональной тематике на государственном языке, проявлять толерантность в рабочем коллективе                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | особенности социального и культурного контекста; правила оформления документов и построения устных сообщений.                                                                                                                                                                                                                                    |
| ОК. 09<br>пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках                                                                  | понимать общий смысл четко произнесенных высказываний на известные темы (профессиональные и бытовые), понимать тексты на базовые профессиональные темы; участвовать в диалогах на знакомые общие и профессиональные темы; строить простые высказывания о себе и о своей профессиональной деятельности; кратко обосновывать и объяснить свои действия (текущие и планируемые); писать простые связные сообщения на знакомые или интересующие профессиональные темы | правила построения простых и сложных предложений на профессиональные темы; основные общеупотребительные глаголы (бытовая и профессиональная лексика); лексический минимум, относящийся к описанию предметов, средств и процессов профессиональной деятельности; особенности произношения; правила чтения текстов профессиональной направленности |

## 2. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 2.1 Объем дисциплины и виды учебной работы

| <i>Вид учебной работы</i> | <i>Объем часов</i> |
|---------------------------|--------------------|
|---------------------------|--------------------|

|                                                                                                                                                                              |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Объем образовательной программы</b>                                                                                                                                       | <b>72</b> |
| <b>Работа обучающихся во взаимодействии с преподавателем</b>                                                                                                                 | <b>52</b> |
| в том числе:                                                                                                                                                                 |           |
| лекции (уроки)                                                                                                                                                               | 16        |
| в форме практической подготовки (если предусмотрено)                                                                                                                         | *         |
| практические занятия                                                                                                                                                         | 36        |
| в форме практической подготовки (если предусмотрено)                                                                                                                         | *         |
| лабораторные занятия                                                                                                                                                         |           |
| в форме практической подготовки (если предусмотрено)                                                                                                                         | *         |
| <b>Самостоятельная работа обучающегося (всего) (если предусмотрена)</b><br><i>Решение задач (подготовка к контрольной работе, подготовка к итоговой контрольной работе).</i> | <b>20</b> |
| Промежуточная аттестация в форме контрольной работы 4 семестре<br><i>Итоговая контрольная работа на 4 семестре</i>                                                           |           |

## 2.2. Тематический план и содержание учебной дисциплины

| Наименование разделов и тем                                      | Содержание учебного материала и формы организации деятельности обучающихся                        | Объем часов | Осваиваемые элементы компетенций           |
|------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|--------------------------------------------|
| <b>Раздел 1<br/>Элементы комбинаторики и теории вероятностей</b> | <b>Содержание учебного материала</b>                                                              | <b>24/7</b> | ОК 01.<br>ОК 02<br>ОК 05<br>ОК 09          |
|                                                                  | Элементы комбинаторики                                                                            |             |                                            |
|                                                                  | <b>Тематика учебных занятий</b>                                                                   | <b>10</b>   |                                            |
|                                                                  | 1. Основные понятия теории вероятностей. Поле событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей  | 2           |                                            |
|                                                                  | 2. Случайные события. Классическое определение вероятностей                                       | 2           |                                            |
|                                                                  | 3. Формула полной вероятности. Формула Байеса                                                     | 2           |                                            |
|                                                                  | 4. Вычисление вероятностей сложных событий                                                        | 2           |                                            |
|                                                                  | 5. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Вычисление вероятностей событий в схеме Бернулли             | 2           |                                            |
|                                                                  | <b>Практическая работа</b>                                                                        | <b>14</b>   |                                            |
|                                                                  | 1. Комбинаторика. Применение правил комбинаторики при решении задач                               | 2           |                                            |
|                                                                  | 2. Решение задач по вычислению вероятности с помощью комбинаторных формул                         | 2           |                                            |
|                                                                  | 3. Решение задач с использованием теорем сложения и умножения вероятностей                        | 2           |                                            |
|                                                                  | 4. Решение задач на вычисление вероятности с помощью формулы полной вероятности и формулы Байеса. | 2           |                                            |
|                                                                  | 5. Решение задач на вычисление вероятности с помощью формул Бернулли.                             | 2           |                                            |
|                                                                  | 6. Геометрическое и аксиоматическое определение вероятности                                       | 2           |                                            |
|                                                                  | 7. Контрольная работа № 1 по темам: Комбинаторика, Основы теории вероятностей                     | 2           |                                            |
|                                                                  | <b>Самостоятельная работа</b>                                                                     | <b>7</b>    |                                            |
| <b>Раздел 2<br/>Виды случайных величин</b>                       | <b>Содержание учебного материала</b>                                                              | <b>20/8</b> | ОК 01.<br>ОК 02<br>ОК 04<br>ОК 05<br>ОК 09 |
|                                                                  | Дискретные случайные величины (ДСВ)                                                               |             |                                            |
|                                                                  | Непрерывные случайные величины (НСВ)                                                              |             |                                            |
|                                                                  | <b>Тематика учебных занятий</b>                                                                   | <b>4</b>    |                                            |
|                                                                  | 1. Дискретная случайная величина (ДСВ) и ее характеристики.                                       | 2           |                                            |
|                                                                  | 2. Понятие непрерывной случайной величины (НСВ) и ее характеристики                               | 2           |                                            |
|                                                                  | <b>Практическая работа</b>                                                                        | <b>16</b>   |                                            |

|                                               |                                                                                         |                |        |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------------|--------|
|                                               | 1. Записать распределения дискретной случайной величины заданной содержательным образом | 2              |        |
|                                               | 2. Понятие биномиального распределения и его применение.                                | 2              |        |
|                                               | 3. Понятие геометрического распределения и его применение                               | 2              |        |
|                                               | 4. Запись распределения нвс, заданной содержательным образом                            | 2              |        |
|                                               | 5. Вычисление характеристик нсв, заданной своим распределением.                         | 2              |        |
|                                               | 6. Центральная предельная теорема и ее применение.                                      | 2              |        |
|                                               | 7. Решение задач на вычисление характеристик случайных величин                          | 2              |        |
|                                               | 8. Контрольная работа №2                                                                | 2              |        |
|                                               | <b>Самостоятельная работа</b>                                                           | <b>8</b>       |        |
| <b>Раздел 3<br/>Математическая статистика</b> | <b>Содержание учебного материала</b>                                                    | <b>8/5</b>     |        |
|                                               | Вариационные ряды и их характеристики                                                   |                | ОК 01. |
|                                               | <b>Тематика учебных занятий</b>                                                         | <b>2</b>       | ОК 02  |
|                                               | 1.Вариационные ряды. Графическое изображение вариационного ряда. Показатели вариации    | 2              | ОК 09  |
|                                               | <b>Практическая работа</b>                                                              | <b>6</b>       |        |
|                                               | 1. Составление эмпирической функции распределения.                                      | 2              |        |
|                                               | 2. Вычисление числовых характеристик статистического распределения                      | 2              |        |
|                                               | <b>Итоговая контрольная работа</b>                                                      | <b>2</b>       |        |
|                                               | <b>Самостоятельная работа (решение задач)</b>                                           | <b>3</b>       |        |
|                                               | <b>Консультации</b>                                                                     | <b>2</b>       |        |
|                                               | <b>Всего/Самостоятельных работ/Консультаций</b>                                         | <b>52/20/2</b> |        |

Последовательное тематическое планирование содержания рабочей программы дисциплины, календарные объемы, виды занятий, формы организации самостоятельной работы также конкретизируются в календарно-тематическом плане (Приложение 1)

### **3. ФОРМЫ КОНТРОЛЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, ИМЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ОПЫТА, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ**

Фонд оценочных средств (далее – ФОС) - комплект методических и контрольных материалов, используемых при проведении текущего контроля освоения результатов обучения и промежуточной аттестации. ФОС предназначен для контроля и управления процессом приобретения обучающимися необходимых знаний, умений и компетенций, определенных во ФГОС (Приложение № 2).

### **4. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ДИСЦИПЛИНЫ**

#### **4.1. Требования к минимальному материально-техническому обеспечению**

Реализация программы дисциплины требует наличия учебных аудиторий

Аудитория № 20. Учебная аудитория для проведения: лекционных, семинарских, практических занятий, уроков, для проведения групповых и индивидуальных консультаций, для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации, курсового проектирования (выполнения курсовых работ)

Учебная мебель, доска.

Аудитория № 144. Читальный зал. Помещение для самостоятельной работы обучающихся.

Учебная мебель, учебно-наглядные пособия, компьютеры с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС Филиала

#### **4.2. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

##### **4.2.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

###### **Основная учебная литература:**

1. Ганичева А.В. Теория вероятностей и математическая статистика : бакалавриат — 12-е изд. — Москва : Издательство , ЭЛБ Лань, 2022. — 144 с.. — 978-5-8114-2380-4— <https://e.lanbook.com/book/209762>
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для СПО / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 479 с. — (Серия :Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-00859-3. — Режим доступа : [www.biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-433406](http://www.biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-433406)
2. Попов, А. М. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для СПО / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под ред. А. М. Попова. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 434 с. — (Серия :Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01058-9. — Режим доступа : [www.biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-433536](http://www.biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-433536)
3. Калинина, В. Н. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для СПО / В. Н. Калинина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 472 с. — (Серия :Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-8773-7. — Режим доступа : [www.biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-433801](http://www.biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-433801)

###### **Дополнительные источники:**

1. Ивашев-Мусатов, О. С. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для СПО / О. С. Ивашев-Мусатов. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 224 с. — (Серия :Профессиональное образование). — ISBN



978-5-534-02467-8. — Режим доступа : [www.biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-433404](http://www.biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-433404)

2. Кацман, Ю. Я. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры с решениями : учебник для СПО / Ю. Я. Кацман. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 130 с. — (Серия :Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10083-9. — Режим доступа : [www.biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-primery-s-resheniyami-434011](http://www.biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-primery-s-resheniyami-434011)

3. Кацман, Ю. Я. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры с решениями : учебник для прикладного бакалавриата / Ю. Я. Кацман. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 130 с. — (Серия :Университеты России). — ISBN 978-5-534-10082-2. — Режим доступа : [www.biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-primery-s-resheniyami-433980](http://www.biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-primery-s-resheniyami-433980)

#### 4.2.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (далее - сеть «Интернет»), необходимых для освоения дисциплины (модуля)

| Перечень договоров ЭБС и БД |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                            |
|-----------------------------|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| Учебный год 2024/2025       |   | Наименование документа с указанием реквизитов                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Срок действия документа    |
|                             | 1 | Договор на доступ к ЭБС ZNANIUM.COM между УУНиТ в лице директора СФ УУНиТ и ООО «Знаниум» № 1151-эбс от 11.07.2023                                                                                                                                                                                                                                                             | С 12.07.2023 по 11.07.2024 |
|                             | 2 | Договор на доступ к ЭБС ZNANIUM.COM между УУНиТ в лице директора СФ УУНиТ и ООО «Знаниум» № 223/801 от 23.08.2023 (предоставление доступа к коллекции ЭФУ «Федеральный перечень учебников издательства «Провещение»                                                                                                                                                            | С 28.08.2023 по 27.08.2024 |
|                             | 3 | Договор на доступ к ЭБС «ЭБС ЮРАЙТ» (полная коллекция) между УУНиТ в лице директора СФ УУНиТ и ООО «Электронное издательство ЮРАЙТ» № 1/24-эбс от 01.03.2024 г.                                                                                                                                                                                                                | С 03.03.2024 по 02.03.2025 |
|                             | 4 | Договор на доступ к ЭБС «Университетская библиотека онлайн» между УУНиТ «Нексмедиа» № 223-1279 от 26.09.2023                                                                                                                                                                                                                                                                   | 01.10.2023 по 30.09.2024   |
|                             | 5 | Договор на доступ к ЭБС «Лань» между УУНиТ и издательством «Лань» № ОГЗ-1033 от 20.07.2023                                                                                                                                                                                                                                                                                     | С 08.08.2023 по 07.08.2024 |
|                             | 6 | Договор на доступ к электронным изданиям в составе базы данных «НАУЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕКА eLIBRARY.RU» между УУНиТ и ООО НЭБ № ОГЗ-1696 от 04.12.2023                                                                                                                                                                                                                     | С 01.01.2024 по 30.12.2024 |
|                             | 7 | Договор на БД диссертаций между УУНиТ и РГБ № 223-997 от 11.07.2023                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | С 10.08.2023 по 09.08.2024 |
|                             | 8 | Договор о подключении к НЭБ и о предоставлении доступа к объектам НЭБ между БашГУ в лице директора СФ БашГУ с ФГБУ «РГБ» № 101/НЭБ/1438-П от 11.06.2019<br>Дополнительное соглашение к договору 101/НЭБ/1438-п от 11.06.19 г. об изменении стороны договора вследствие реорганизации в форме присоединения между УУНиТ в лице директора СФ УУНиТ с ФГБУ «РГБ» от 14.02.2023 г. | С 11.06.2019 по 10.06.2024 |
|                             | 9 | Договор на доступ к ЭБС BOOK.ru (доступ к учебнику: Основы российской государственности : учебник / А. В. Малько, А. А. Вилков, В. В. Гурьев [и                                                                                                                                                                                                                                | С 23.10.2023 по            |

|  |                                                                                                                                                                            |            |
|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
|  | др.] ; под ред. А. В. Малько. — Москва : КноРус, 2024. — 263 с. — ISBN 978-5-406-12322-5) между УУНиТ в лице директора СФ УУНиТ и ООО «КноРус медиа» № 75 от 23.10.2023 г. | 22.10.2024 |
|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|

**4.3.3. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

| <b>Наименование программного обеспечения</b>              |
|-----------------------------------------------------------|
| Mathcad University Classroom Perpetual-15 Floating.       |
| Office Standard 2007 Russian OpenLicensePackNoLevelAcadmс |

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

Стерлитамакский филиал

Колледж

**Календарно-тематический план**

по дисциплине

***ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика***

|                        |                                                         |
|------------------------|---------------------------------------------------------|
|                        | специальность                                           |
| <b><i>09.02.07</i></b> | <b><i>Информационные системы и программирование</i></b> |
| код                    | наименование специальности                              |
|                        | квалификация                                            |
|                        | <b><i>Специалист по информационным системам</i></b>     |

Разработчик (составитель)

***преподаватель высшей категории***

***Дмитриева С.Г.***

ученая степень, ученое звание,  
категория, Ф.И.О.

Стерлитамак 2025

| №<br>п/п                                                      | Наименование разделов и тем                                                                   | Кол-<br>во<br>часо<br>в |  |  | Вид<br>занятия | Домашне<br>е задание          |
|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|--|--|----------------|-------------------------------|
| <b>Раздел 1. Элементы комбинаторики и теории вероятностей</b> |                                                                                               |                         |  |  |                |                               |
| 1.                                                            | Основные понятия теории вероятностей. Поле событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей | 2/2                     |  |  | Лекция         | решение задач                 |
| 2.                                                            | Случайные события. Классическое определение вероятностей                                      | 2/4                     |  |  | Лекция         | решение задач                 |
| 3.                                                            | Комбинаторика. Применение правил комбинаторики при решении задач                              | 2/6                     |  |  | практиче       | решение задач                 |
| 4.                                                            | Решение задач по вычислению вероятности с помощью комбинаторных формул.                       | 2/8                     |  |  | прктиче        | решение задач                 |
| 5.                                                            | Решение задач с использованием теорем сложения и умножения вероятностей                       | 2/10                    |  |  | практиче       | решение задач                 |
| 6.                                                            | Формула полной вероятности. Формула Байеса                                                    | 2/12                    |  |  | Лекция         | решение задач                 |
| 7.                                                            | Решение задач на вычисление вероятности с помощью формулы полной вероятности и формулы Байеса | 2/14                    |  |  | практиче       | решение задач                 |
| 8.                                                            | Вычисление вероятностей сложных событий                                                       | 2/16                    |  |  | Лекция         | решение задач                 |
| 9.                                                            | Схема Бернулли. Формула Бернулли. Вычисление вероятностей событий в схеме Бернулли            | 2/18                    |  |  | Лекция         | решение задач                 |
| 10.                                                           | Решение задач на вычисление вероятности с помощью формул Бернулли.                            | 2/20                    |  |  | Практиче       | решение задач                 |
| 11.                                                           | Геометрическое и аксиоматическое определение вероятности                                      | 2/22                    |  |  | Практиче       | решение задач                 |
| 12.                                                           | Контрольная работа №1                                                                         | 2/24                    |  |  | Практиче       | Повторить пройденный материал |
| <b>Раздел 2 Виды случайных величин</b>                        |                                                                                               |                         |  |  |                |                               |
| 13.                                                           | Дискретная случайная величина (ДСВ) и ее характеристики                                       | 2/26                    |  |  | Лекция         | решение задач                 |
| 14.                                                           | Понятие непрерывной случайной величины (НВС) и ее характеристики                              | 2/28                    |  |  | Лекция         | решение задач                 |
| 15.                                                           | Записать распределения дискретной случайной величины заданной содержательным образом          | 2/30                    |  |  | Практиче       | решение задач                 |
| 16.                                                           | Понятие биномиального распределения и его применение.                                         | 2/32                    |  |  | Практиче       | решение задач                 |

|                                             |                                                                                        |      |  |  |          |               |
|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|------|--|--|----------|---------------|
| 17.                                         | Понятие геометрического распределения и его применение.                                | 2/34 |  |  | Практиче | решение задач |
| 18.                                         | Запись распределения нвс, заданной содержательным образом                              | 2/36 |  |  | Практиче | решение задач |
| 19.                                         | Вычисление характеристик нсв, заданной своим распределением.                           | 2/38 |  |  | Практиче | решение задач |
| 20.                                         | Центральная предельная теорема и ее применение.                                        | 2/40 |  |  | Практиче | решение задач |
| 21.                                         | Решение задач на вычисление характеристик случайных величин.                           | 2/42 |  |  | Практиче | решение задач |
| 22.                                         | Контрольная работа №2                                                                  | 2/44 |  |  | Практиче |               |
| <b>Раздел 5. Математическая статистика.</b> |                                                                                        |      |  |  |          |               |
| 23.                                         | Задачи и методы математической статистики. Числовые характеристики вариационного ряда. | 2/46 |  |  | Лекция   | решение задач |
| 24.                                         | Составление эмпирической функции распределения.                                        | 2/48 |  |  | Практиче | решение задач |
| 25.                                         | Вычисление числовых характеристик статистического распределения                        | 2/50 |  |  | Практиче | решение задач |
| 26.                                         | Итоговая контрольная                                                                   | 2/52 |  |  | Практиче |               |
| <b>Всего часов</b>                          |                                                                                        | 52   |  |  |          |               |

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

Стерлитамакский филиал

Колледж

**Фонд оценочных средств**

по дисциплине

***ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика***

---

***Математический и общий естественнонаучный цикл, обязательная часть***

цикл дисциплины и его часть (обязательная, вариативная)

специальность

***09.02.07***

***Информационные системы и программирование***

код

наименование специальности

квалификация

***Специалист по информационным системам***

---

Разработчик (составитель)

***преподаватель высшей категории***

***Дмитриева С.Г.***

ученая степень, ученое звание,  
категория, Ф.И.О.

Стерлитамак 2025

## **I Паспорт фондов оценочных средств**

### **1. Область применения**

**Фонд оценочных средств (ФОС)** предназначен для проверки результатов освоения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», входящей в состав программы подготовки специалистов среднего звена по специальности «Информационные системы и программирование». **Работа обучающихся во взаимодействии с преподавателем 52**, на самостоятельную работу 20.

### **2. Объекты оценивания – результаты освоения дисциплины**

ФОС позволяет оценить следующие результаты освоения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» в соответствии с ФГОС специальности «Информационные системы и программирование:

#### **умения:**

- распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы;
- составить план действия; определить необходимые ресурсы;
- владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;
- реализовать составленный план;
- оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)
- определять задачи для поиска информации; определять необходимые источники информации; планировать процесс поиска;
- структурировать получаемую информацию;
- выделять наиболее значимое в перечне информации; оценивать практическую значимость результатов поиска; оформлять результаты поиска;
- организовывать работу коллектива и команды; взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности;
- грамотно излагать свои мысли и оформлять документы по профессиональной тематике на государственном языке, проявлять толерантность в рабочем коллективе;
- применять средства информационных технологий для решения профессиональных задач;
- использовать современное программное обеспечение;
- понимать общий смысл четко произнесенных высказываний на известные темы (профессиональные и бытовые), понимать тексты на базовые профессиональные темы;
- участвовать в диалогах на знакомые общие и профессиональные темы; строить простые высказывания о себе и о своей профессиональной деятельности;
- кратко обосновывать и объяснить свои действия (текущие и планируемые);
- писать простые связные сообщения на знакомые или интересующие профессиональные темы.

#### **знания:**

- актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить;
- основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте;
- алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях;
- методы работы в профессиональной и смежных сферах;
- структуру плана для решения задач;
- порядок оценки результатов решения задач профессиональной деятельности

- номенклатуры информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности;
- приемы структурирования информации;
- формат оформления результатов поиска информации;
- психологические основы деятельности коллектива, психологические особенности личности;
- основы проектной деятельности;
- особенности социального и культурного контекста;
- правила оформления документов и построения устных сообщений;
- современные средства и устройства информатизации; порядок их применения и программное обеспечение в профессиональной деятельности
- правила построения простых и сложных предложений на профессиональные темы;
- основные общеупотребительные глаголы (бытовая и профессиональная лексика);
- лексический минимум, относящийся к описанию предметов, средств и процессов профессиональной деятельности;
- особенности произношения;
- правила чтения текстов профессиональной направленности.

Вышеперечисленные умения, знания направлены на формирование у обучающихся следующих **общих компетенций**:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

### **3 Формы контроля и оценки результатов освоения дисциплины**

Контроль и оценка результатов освоения – это выявление, измерение и оценивание знаний, умений и формирующихся общих компетенций в рамках освоения дисциплины.

В соответствии с учебным планом специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование и рабочей программой дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» предусматривается текущий и промежуточный контроль результатов освоения.

#### **3.1 Формы текущего контроля**

Текущий контроль успеваемости представляет собой проверку усвоения учебного материала, регулярно осуществляемую на протяжении курса обучения.

Текущий контроль результатов освоения дисциплины в соответствии с рабочей программой дисциплины происходит при использовании следующих обязательных форм контроля:

- проверка выполнения контрольных работ.

Во время проведения учебных занятий дополнительно используются следующие формы текущего контроля – устный опрос, решение задач.

### **Перечень практических работ**

**Практическая работа №1 «Комбинаторика. Применение правил комбинаторики при решении задач»**



**Практическая работа №2** «Решение задач по вычислению вероятности с помощью комбинаторных формул»

**Практическая работа №3** «Решение задач с использованием теорем сложения и умножения вероятностей»

**Практическая работа №4** «Решение задач на вычисление вероятности с помощью формулы полной вероятности и формулы Байеса»

**Практическая работа №5** «Решение задач на вычисление вероятности с помощью формул Бернулли.»

**Практическая работа №6** «Геометрическое и аксиоматическое определение вероятности»

**Практическая работа №7** «Записать распределения дискретной случайной величины заданной содержательным образом»

**Практическая работа №8** «Понятие биномиального распределения и его применение»

**Практическая работа №9** «Понятие геометрического распределения и его применение»

**Практическая работа №10** «Запись распределения нвс, заданной содержательным образом»

**Практическая работа №11** «Вычисление характеристик нсв, заданной своим распределением.»

**Практическая работа №12** «Центральная предельная теорема и ее применение.»

**Практическая работа №13** «Решение задач на вычисление характеристик случайных величин»

**Практическая работа №14** «Составление эмпирической функции распределения.»

**Практическая работа №15** «Вычисление числовых характеристик статистического распределения»

**Практическая работа №1** «Комбинаторика. Применение правил комбинаторики при решении задач»

**Задачи на подсчет числа размещений**

**Задача 1.** У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

**Задача 2.** Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

**Задача 3.** В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

**Задача 4.** В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек?

**Задача 5.** Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.

**Задача 6.** Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

**Задача 7.** В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

**Задача 8.** Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей?

**Задача 9.** Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове Гора и Институт?

**Задача 10.** Каких чисел от 1 до 1 000 000 больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в которых она не встречается?

## Задачи на подсчет числа перестановок

**Задача 1.** У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

**Задача 2.** Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

**Задача 3.** В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

**Задача 4.** В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек?

**Задача 5.** Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.

**Задача 6.** Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

**Задача 7.** В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

**Задача 8.** Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей?

**Задача 9.** Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове Гора и Институт?

**Задача 10.** Каких чисел от 1 до 1 000 000 больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в которых она не встречается?

## Задачи на подсчет числа сочетаний

**Задача 1.** Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги из 5?

**Решение.** Искомое число способов равно числу 3-элементных подмножеств 5-элементного множества:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! 2!} = 10.$$

**Задача 2.** Сколькими способами из 7 человек можно выбрать комиссию, состоящую из 3 человек?

Решение. Чтобы рассмотреть все возможные комиссии, нужно рассмотреть все возможные 3-элементные подмножества множества, состоящего из 7 человек. Искомое число способов равно

$$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Задача 3. В турнире принимали участие  $n$  шахматистов, и каждые 2 шахматиста встретились 1 раз. Сколько партий было в турнире?

Решение. Партий было сыграно столько, сколько можно выделить 2-элементных подмножеств в множестве из  $n$  элементов, то есть

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

Задача 4. В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого  $n$ -угольника, если никакие 3 из них не пересекаются в одной точке?

Решение. Каждой точке пересечения двух диагоналей соответствует 4 вершины  $n$ -угольника, а каждым 4 вершинам  $n$ -угольника соответствует 1 точка пересечения (точка пересечения диагоналей четырехугольника с вершинами в данных 4 точках). Поэтому число всех точек пересечения равно числу способов, которыми среди  $n$  вершин можно выбрать 4 вершины:

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Задача 5. В начале игры в домино каждому играющему выдается 7 костей из имеющихся 28 различных костей. Сколько существует различных комбинаций костей, которые игрок может получить в начале игры?

Решение. Очевидно, что искомое число равно числу 7-элементных подмножеств 28-элементного множества. Имеем:

$$C_{28}^7 = \frac{28!}{7!(28-7)!} = \frac{28 \cdot 27 \cdot \dots \cdot 22}{7 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 1} = 1184040.$$

## 5. Сочетания с повторениями

Задача 1. Трое ребят собрали в лесу 63 яблока. Сколькими способами они могут разделить их между собой?

Решение. Поставим в соответствие каждому делению яблок между ребятами сочетание с повторениями следующим способом. Типами элементов в нашем случае будут ребята. Таким образом, имеем три типа элементов  $a, b, c$  ( $n=3$ ), из которых предстоит составить все различные расстановки длины  $k=63$ . Наличие в расстановке какого-либо из элементов  $a, b, c$  отвечает принадлежности данного яблока соответствующему мальчику. Порядок элементов в такой расстановке не играет роли. При делении яблок

между ребятами не важно, какое из них попадет тому или иному мальчику. Тогда число способов разделить яблоки между ребятами равно  $f_3^{63} = C_{3+63-1}^{63} = C_{3+63-1}^2 = \frac{65 \cdot 64}{2} = 2080$ .

**Задача 2.** Сколькими способами можно рассадить  $k$  вновь прибывших гостей среди  $n$  гостей, уже сидящих за круглым столом?

**Решение.** Очевидно, что между  $n$  сидящими за круглым столом гостями имеется  $n$  промежутков, в которые можно рассаживать вновь прибывших. Таким образом, это

можно сделать  $f_n^k = C_{n+k-1}^n = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$  способами.

## **Практическая работа №2 «Решение задач по вычислению вероятности с помощью комбинаторных формул»**

**Задача 1.** В группе 30 человек. Необходимо выбрать старосту и профорга. Сколькими способами можно это сделать?

**Задача 2.** Необходимо составить варианты контрольной работы, каждый из которых должен содержать три задачи. Первая задача выбирается из любого параграфа I главы сборника, вторая - из любого параграфа II главы, а третья - из любого параграфа III главы. Сколько видов контрольной работы можно составить, если I и III глава содержат два параграфа, а II глава - три параграфа?

**Задача 3.** Четыре мальчика и четыре девочки садятся на 8 расположенных подряд стульях, причем мальчики садятся на места с четными номерами, а девочки - на места с нечетными номерами. Сколькими способами это можно сделать?

**Задача 4.** Имеется 20 изделий 1-го сорта и 30 изделий 2-го сорта. Необходимо выбрать 2 изделия одного сорта. Сколькими способами можно это сделать?

**Задача 5.** Пусть имеется множество, содержащее 2 буквы {А, В}. Записать все возможные размещения с повторениями из 4-х букв

## **Практическая работа №3 «Решение задач с использованием теорем сложения и умножения вероятностей».**

**Задача 1.** Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.

**Задача 2.** Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число, меньшее 30. С учетом этого он набирает наугад 2 цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры.

**Задача 3.** Шесть шаров случайным образом раскладывают в три ящика. Найти вероятность того, что во всех ящиках окажется разное число шаров, при условии, что все ящики не пустые.

**Задача 4.** На шахматную доску случайным образом поставлены две ладьи. Какова вероятность, что они не будут бить одна другую?

**Задача 5.** Шесть рукописей случайно раскладывают по пяти папкам. Какова вероятность того, что ровно одна папка останется пустой?

**Задача 6.** Цифры 1, 2, 3, ..., 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) четное; б) двузначное.

**Задача 7.** На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номера слева направо, но не обязательно рядом.

**Задача 8.** На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: "а", "м", "р", "т", "ю". Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной карточке можно прочесть слово "юрта".

**Задача 9.** Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

**Задача 10.** В пачке 20 перфокарт, помеченных номерами 101, 102, ... , 120 и произвольно расположенных. Перфораторщица наудачу извлекает две карты. Найти вероятность того, что извлечены перфокарты с номерами 101 и 120.

**Задача 11.** Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что книги стоят слева направо в порядке нумерации томов (от 1 до 5)?

**Задача 12.** Случайно выбранная кость в игре домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую также взятую наудачу кость домино можно приставить к первой.

**Задача 13.** Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит  $N$ ; б) произведение числа очков не превосходит  $N$ ; в) произведение числа очков делится на  $N$ .  $N=8$

**Практическая работа №4 «Решение задач на вычисление вероятности с помощью формулы полной вероятности и формулы Байеса»**

***Формула полной вероятности и формула Байеса***

Если событие  $A$  может произойти только при выполнении одного из событий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , которые образуют *полную группу несовместных событий*, то вероятность события  $A$  вычисляется по формуле

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n).$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности*.

Вновь рассмотрим полную группу несовместных событий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , вероятности появления которых  $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$ . Событие  $A$  может произойти только вместе с каким-либо из событий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , которые будем называть *гипотезами*. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)$$

Если событие  $A$  произошло, то это может изменить вероятности гипотез  $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$ .

По теореме умножения вероятностей

$$P(AB_1) = P(B_1)P(A|B_1) = P(A)P(B|A),$$

откуда

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}.$$

Аналогично, для остальных гипотез

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Полученная формула называется *формулой Байеса (формулой Бейеса)*. Вероятности гипотез  $P(B_i|A)$  называются *апостериорными вероятностями*, тогда как  $P(B_i)$  - *априорными вероятностями*.

**Пример.1** В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции следующий: 20% - продукция первого предприятия, 30% - продукция второго предприятия, 50% - продукция третьего предприятия; далее, 10% продукции первого предприятия высшего сорта, на втором предприятии - 5% и на третьем - 20% продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что случайно купленная новая продукция окажется высшего сорта.

**Решение.** Обозначим через  $B$  событие, заключающееся в том, что будет куплена продукция высшего сорта, через  $A_1, A_2, A_3$  обозначим события, заключающиеся в покупке продукции, принадлежащей соответственно первому, второму и третьему предприятиям.

Можно применить формулу полной вероятности, причем в наших обозначениях:

$$P(A_1) = 0,2 \quad P(B|A_1) = 0,1$$

$$P(A_2) = 0,3 \quad P(B|A_2) = 0,05$$

$$P(A_3) = 0,5 \quad P(B|A_3) = 0,2$$

Подставляя эти значения в формулу полной вероятности, получим искомую вероятность:

$$P(B) = 0,2 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,135.$$

**Пример 2.** Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго - 0,5; для третьего - 0,8. Мишень не поражена. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.

**Пример 3.** На трех станках-автоматах обрабатываются однотипные детали, поступающие после обработки на общий конвейер. Первый станок дает 2% брака, второй – 7%, третий – 10%. Производительность первого станка в 3 раза больше производительности второго, а третьего – в 2 раза меньше, чем второго.

а) Каков процент брака на конвейере?

б) Каковы доли деталей каждого станка среди бракованных деталей на конвейере?

**Решение.** Возьмем с конвейера наудачу одну деталь и рассмотрим событие  $A$  – деталь бракованная. Оно связано с гипотезами относительно того, где была обработана эта деталь:  $H_k$  – взятая наудачу деталь обработана на  $k$ -ом станке,  $k = 1, 2, 3$ .

Условные вероятности (в условии задачи они даны в форме процентов):

$$P(A|H_1) = 0,02, \quad P(A|H_2) = 0,07, \quad P(A|H_3) = 0,1.$$

Зависимости между производительностями станков означают следующее:

$$P(H_1) = 3P(H_2), \quad P(H_3) = 0,5P(H_2).$$

А так как гипотезы образуют полную группу, то  $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$ .



Решив полученную систему уравнений, найдем:

$$P(H_1) = 6/9, P(H_2) = 2/9, P(H_3) = 1/9$$

а) Полная вероятность того, что взятая наудачу с конвейера деталь – бракованная:

$$P(A) = \sum P(A|H_i)P(H_i) = \frac{6}{9} \cdot 0,02 + \frac{2}{9} \cdot 0,07 + \frac{1}{9} \cdot 0,1 = 0,04$$

Другими словами, в массе деталей, сходящих с конвейера, брак составляет 4%.

б) Пусть известно, что взятая наудачу деталь – бракованная. Пользуясь формулой Байеса, найдем условные вероятности гипотез:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{6/9 \cdot 0,02}{0,04} = 0,33$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{2/9 \cdot 0,07}{0,04} = 0,39$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A)} = \frac{1/9 \cdot 0,1}{0,04} = 0,28$$

Таким образом, в общей массе бракованных деталей на конвейере доля первого станка составляет 33%, второго – 39%, третьего – 28%.

**Пример 4.** Имеется пять урн:

2 урны состава  $H_1$  - по 2 белых шара и 1 черному,

1 урна состава  $H_2$  - 10 черных шаров,

2 урны состава  $H_3$  — по 3 белых и 1 черному шару.

Наудачу выбирается урна, и из нее наудачу выбирается шар. Чему равна вероятность события  $A = \{\text{будет вынут белый шар}\}$ ?

**Пример 5.**

В двух одинаковых коробках имеется по 100 резисторов. В 1-й - 60 резисторов по 100 КОм, во 2-й 30 - резисторов по 100 КОм. Определить

вероятность того, что взятый наугад из какой-либо коробки резистор будет 100 КОм.

### **Пример 6**

В первой коробке находится 20 деталей, из них 18 стандартных, во второй коробке – 10 деталей, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята одна деталь и переложена в первую коробку.

Какова вероятность того, что деталь, наудачу извлечённая после этого из первой коробки, окажется стандартной?

### **Пример 7**

Два станка производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого станка в два раза больше производительности второго станка. Первый производит 60 % деталей высшего сорта, а второй – 84 %. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась высшего сорта. Какова вероятность того, что эта деталь произведена на первом станке?

### **Пример 8.**

В ящике 20 белых и 10 чёрных шаров. Поочерёдно извлекают 4 шара, причём каждый извлечённый шар возвращают в ящик перед извлечением следующего. Какова вероятность того, что среди четырёх извлечённых шаров окажется два белых?

#### **«Вычисление вероятностей сложных событий»**

1. На отрезок  $[-10; 5]$  числовой прямой случайным образом бросается точка. Какова вероятность события, что точка попадет на отрицательную часть отрезка.
2. На отрезок длины 12 см помещен отрезок длины 4 см. Найти вероятность того, что точка случайным образом брошенная на больший отрезок попадет и на меньший. Считается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка.
3. На отрезок  $OA$  длины  $d$  случайным образом брошена точка  $B$ . Чему равна вероятность того, что меньший из отрезков  $OB$  и  $BA$  имеет длину, большую, чем  $d/4$ ? Считается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка.
4. На участке  $AB$  железнодорожной ветки протяженностью 20 км произошла авария. Чему равна вероятность того, что место аварии удалено от пункта  $A$  меньше, чем на 6 км?; б) больше чем на 10 км?
5. В квадрат с длинной стороны 4 случайным образом бросают точку. Какова вероятность, что точка окажется от ближайшей к ней стороны квадрата на расстоянии не более, чем 2.

6. Равносторонний треугольник вписан в круг. Найти вероятность того, что произвольно выбранная точка будет принадлежать обеим фигурам.
7. В равносторонний треугольник вписан круг. Найти вероятность того, что произвольно выбранная точка будет принадлежать обеим фигурам.
8. На плоскость с нанесенной на нее квадратной сеткой, многократно случайным образом бросалась монета достоинством 5 руб. с диаметром 2,5 см. В 36% случаев монета не пересекала линии сетки. Оценить размер сетки.
9. На отрезке  $[-3, 3]$  наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что сумма этих чисел не меньше единицы?  $[25/72]$
10. Случайным образом выбраны два отрицательных числа  $X$  и  $Y$ , каждое из которых больше чем  $-2$  и  $Y$  меньше чем  $X$ . Найти вероятность того, что разность  $Y - X$  также меньше  $-1$ .
11. Случайным образом выбраны два положительных числа  $X$  и  $Y$ , каждое из которых меньше 1 и  $Y$  меньше чем  $X$ . Найти вероятность того, что их сумма также меньше.
12. Точка  $M$  случайным образом бросается в квадрат  $\{(x, y) : |x| \leq a, |y| \leq a\}$ . Найти вероятность того, что квадрат с центром в точке  $M$  и сторонами длины  $b$ ,  $b < a$ , параллельными осям координат, целиком содержится в квадрате.
13. Чтобы развлечься на летнем пляже, можно прокатиться на скутере или «на банане». Время подхода скутера 20 мин., а «банана» 25 мин. Какова вероятность, что в ближайшие 5 минут удастся прокатиться.
14. В момент времени от 11,30 до 12,00 на вокзал должны прибыть два поезда. Первый стоит 15 мин, второй – 10 мин. Определить вероятность, того что проводники поездов встретятся.
15. Два студента условились встретиться в определенном месте между 14 и 15 часами. Пришедший первым ждет второго в течении  $1/2$  часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода.
16. Два частных самолета должны приземлиться на одном и том же аэродроме. Время прилета обоих самолетов независимо и равновозможно в течение получаса. Определить вероятность того, что одному из самолетов придется ждать освобождения полосы, если время приземления первого – 10 мин, а второго – 16 мин.

**Практическая работа №5** «Решение задач на вычисление вероятности с помощью формул Бернулли».

**Задача 1.** Пусть проводится  $n = 6$  независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события  $A$  постоянна и равна  $p = 0,1$ . Найти вероятность того, что в данной серии испытаний событие  $A$  появится  $m = 3$  раза.

**Решение:** используем формулу Бернулли:

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$$

В данной задаче:

$n = 6$  – всего испытаний;

$m = 3$  – ожидаемое количество появлений события  $A$  шести испытаниях;

$p = 0,1$  – вероятность появления события  $A$  в каждом испытании;

$q = 1 - p = 1 - 0,1 = 0,9$  – вероятность того, что событие  $A$  не появится в каждом испытании;

$P_6^3$  – вероятность того, что в 6 испытаниях событие  $A$  появится ровно 3 раза.

Таким образом, искомая вероятность:

$$P_6^3 = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^3 = \frac{6!}{3!3!} \cdot (0,1)^3 \cdot (0,9)^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} \cdot 0,001 \cdot 0,729 = 0,01458$$

**Ответ:**  $P_6^3 = 0,01458$

**Задача 2.** Стрелок делает 6 выстрелов по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле  $\frac{2}{3}$ . Найти вероятность того, что он попал 4 раза.

**Решение:** используем формулу Бернулли:

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$$

В данном случае:

$n = 6$  – всего выстрелов;

$m = 4$  – искомое количество попаданий в шести испытаниях;

$p = \frac{2}{3}$  – вероятность попадания в мишень при каждом выстреле;

$q = 1 - p = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$  – вероятность промаха в каждом выстреле;

Таким образом:

$$P_6^4 = C_6^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{9} = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot \frac{16}{729} = \frac{80}{243} \text{ – вероятность того, что при шести выстрелах будет ровно 4 попадания.}$$

**Ответ:**  $P_6^4 = \frac{80}{243} \approx 0,3292$

Активация  
Чтобы активировать  
"Параметры".

**Задача 3.** В результате обследования были выделены семьи, имеющие по 4 ребенка. Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности появления в ней:

- а) одного мальчика;
- б) двух мальчиков.

**Решение:** Используем формулу Бернулли:  $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$

В данной задаче:

$n = 4$  – всего детей в семье;

$m$  – количество мальчиков в семье.

$p = 0,5$  – вероятность рождения мальчика;

$q = 1 - p = 1 - 0,5 = 0,5$  – вероятность рождения девочки;

$P_4^m$  – вероятность того, что среди 4 детей будет ровно  $m$  мальчиков.

а)  $P_4^1 = C_4^1 \cdot (0,5)^1 \cdot (0,5)^3 = 4 \cdot (0,5)^4 = 0,25$  – вероятность того, что среди 4 детей будет один мальчик.

б)  $P_4^2 = C_4^2 \cdot (0,5)^2 \cdot (0,5)^2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot (0,5)^2 \cdot (0,5)^2 = 6 \cdot (0,5)^4 = 0,375$  – вероятность того, что среди 4 детей будет два мальчика.

**Ответ:** а) 0,25; б) 0,375

Активация W  
Чтобы активировать  
"Параметры".

**Задача 4.** Статистика аудиторских проверок компании утверждает, что вероятность обнаружения ошибки в каждом проверяемом документе равна 0,1. Какова вероятность, что из десяти проверяемых документов девять из них не будет содержать ошибки?

**Решение:** используем формулу Бернулли:  $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$

В данном случае:

$n = 10$  – всего проверяемых документов;

$m = 9$  – количество документов, в которых нет ошибки;

$p = 0,9$  – вероятность того, что документ не содержит ошибки;

$q = 0,1$  – вероятность того, что ошибка есть.

Таким образом:

$P_{10}^9 = C_{10}^9 \cdot p^9 \cdot q^1 = 10 \cdot (0,9)^9 \cdot 0,1 \approx 0,3874$  – вероятность того, что из десяти проверяемых документов ровно девять не будут содержать ошибки.

**Ответ:**  $\approx 0,3874$

**Задача 5.** По данным технического контроля 2% изготовленных станков нуждаются в дополнительной регулировке. Найти вероятность того, что из 6 изготовленных станков 4 нуждаются в дополнительной регулировке.

**Задача 7.** В каждой из восьми урн имеется 10 белых и 5 черных шаров. Из каждой урны извлекли по одному шару. Что вероятнее: появление двух черных и шести белых или трех черных и пяти белых шаров?

**Задача 7.** В каждой из восьми урн имеется 10 белых и 5 черных шаров. Из каждой урны извлекли по одному шару. Что вероятнее: появление двух черных и шести белых или трех черных и пяти белых шаров?

**Задача 6.** Производится 5 выстрелов в мишень. Вероятность попадания при каждом выстреле равна  $\frac{3}{4}$ . Найти вероятность того, что в мишени будет не менее трёх, но и не более четырёх пробитых. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую ему вероятность.

**Задача 8.** Вероятность поражения стрелком мишени равна 0,5. Найти вероятность того, что при 8 выстрелах мишень будет поражена от 5 до 7 раз.

**Практическая работа №6** «Геометрическое и аксиоматическое определение вероятности».

**Пример 1.** В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров: а) не меньше 7; б) равна 11; в) не больше 11?

**Решение.** а) Пусть  $A$  – событие, состоящее в том, что сумма номеров вынутых шаров не меньше 7 (т.е. больше или равна 7).

После вынимания из каждого ящика по одному шару возможны следующие исходы: (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), (1,10), (2,6), (2,7), (2,8), (2,9), (2,10), (3,6), (3,7), (3,8), (3,9), (3,10), (4,6), (4,7), (4,8), (4,9), (4,10), (5,6), (5,7), (5,8), (5,9), (5,10).

Число всех равновозможных случаев (исходов)  $n = 25$ . Очевидно, что число случаев (исходов), благоприятствующих наступлению события  $A$ , равно  $m=25$ .

Тогда по формуле (1)  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{25}{25} = 1$ . Событие  $A$  – достоверное.

б) Исходами, благоприятствующими наступлению события  $B = \{\text{сумма номеров вынутых шаров равна 11}\}$ , являются (5,6), (4,7), (3,8), (2,9), (1,10). Число таких случаев  $m=5$ . Число всех равновозможных случаев  $n = 25$  (см. пункт а). Поэтому

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

в) Число всех случаев  $n = 25$ . Исходами, благоприятствующими наступлению события  $C = \{\text{сумма номеров вынутых шаров не больше 11 (т.е. меньше или равна 11)}\}$ , являются (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), (1,10), (2,6), (2,7), (2,8), (2,9), (3,6), (3,7), (3,8), (4,6), (4,7), (5,6). Число таких случаев равно  $m = 15$ . Следовательно,

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

Активация  
Чтобы активир

**Пример 2.** Числа 1, 2, 3, 4, 5 написаны на пяти карточках. Наугад последовательно выбираются три карточки, и вынутые таким образом цифры ставятся слева направо. Найти вероятность того, что полученное при этом трехзначное число будет четным.

**Решение.** Пусть событие  $A = \{\text{получение четного трехзначного числа}\}$ . Различные комбинации трех цифр из имеющихся пяти представляют собой размещения, так как они могут отличаться как составом входящих цифр, так и порядком их следования (или и тем и другим), т. е. общее число всех случаев  $n = A_5^3$ , из которых событию  $A$  благоприятствует  $m = 2 \cdot A_4^2$  случаев (число будет четным, если оно оканчивается либо на 2, либо на 4). По формуле (1)

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2 \cdot A_4^2}{A_5^3} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{2}{5}.$$

**Пример 3. (задача о выборке).** В партии из 50 деталей 5 нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки 6 деталей 2 окажутся нестандартными.



**Решение.** Пусть событие  $A = \{\text{из 6 выбранных наудачу для проверки деталей две - нестандартные}\}$ . Общее число всех случаев выбора 6 деталей из 50 равно  $n = C_{50}^6$ , так как комбинации из 50 деталей по 6 представляют собой сочетания, ибо они отличаются только составом деталей. Определим число случаев, благоприятствующих событию  $A$ . Число способов выбрать 2 нестандартные детали из 5, находящихся в партии, равно  $C_5^2$ . Каждому такому выбору соответствует  $C_{45}^4$  способов выбора 4 стандартных деталей из 45 стандартных деталей в партии. Следовательно, по правилу произведения число случаев, благоприятствующих событию  $A$ , равно:  $m = C_5^2 \cdot C_{45}^4$ . Таким образом,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^2 \cdot C_{45}^4}{C_{50}^6} \approx 0,08.$$

**Пример 4.** Из колоды карт (36 карт) наудачу вынимаются 3 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы одна “дама”.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Из четырех одинаковых карточек, на которых написаны буквы А, Б, В, Г, наугад взяты две. Определить вероятность того, что буквы на этих карточках будут соседними по алфавиту.
2. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятность следующих событий: а) сумма выпавших очков равна 8; б) произведение выпавших очков равно 8; в) сумма выпавших очков больше, чем их произведение.
3. Даны 9 карточек с числами от 1 до 9. Наудачу берут 5 карточек и располагают их в строку, в результате получается пятизначное число. Найти вероятность того что: а) полученное число будет четным; б) число делится на 5; в) число делится на 25.
4. Из 20 акционерных обществ (АО) 4 являются банкротами. Гражданин приобрел по одной акции шести АО. Какова вероятность того, что среди купленных акций две окажутся акциями банкротов.
5. В лифт на 1-м этаже девятиэтажного дома вошли 4 человека, каждый из которых может выйти независимо друг от друга на любом этаже со 2-го по 9-й. Какова вероятность того, что все пассажиры выйдут: а) на 6-м этаже; б) на одном этаже?
6. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12 и 13. Наугад берутся две карточки. Определить вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.
7. Из десяти лотерейных билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов: а) один выигрышный; б) оба выигрышных; в) хотя бы один выигрышный.
8. В магазине было продано 21 из 25 холодильников трех марок, имеющих в количествах 5, 7 и 13 штук. Полагая, что вероятность быть проданным для холодильника каждой марки одна и та же, найти вероятность того, что остались нераспроданными холодильники одной марки.



9. На полке стоят 10 книг, среди которых 3 книги по теории вероятностей. Наудачу берутся три книги. Какова вероятность, что среди отобранных хотя бы одна книга по теории вероятностей?

10. Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются четыре билета, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся: а) четыре девушки; б) четыре юноши; в) три юноши и одна девушка?

11. Из 20 сбербанков 10 расположены за чертой города. Для обследования случайным образом отобрано 5 сбербанков. Какова вероятность того, что среди отобранных окажется в черте города: а) 3 сбербанка; б) хотя бы один?

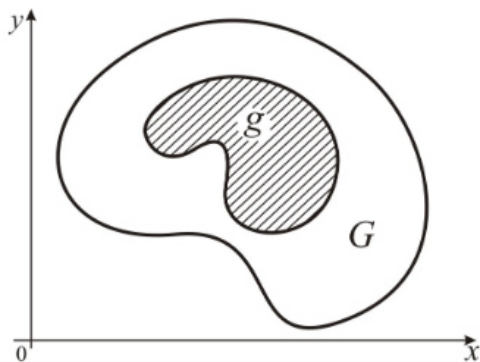
12. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее чем на 3 из 4 поставленных в билете вопросов. Взглянув на первый вопрос билета, студент обнаружил, что он его знает. Какова вероятность того, что студент: а) сдает зачет; б) не сдает зачет?

13. В магазине имеются 30 телевизоров, причем 20 из них импортных. Найти вероятность того, что среди 5 проданных в течение дня телевизоров окажется не менее 3 импортных телевизоров, предполагая, что вероятности покупки телевизоров разных марок одинаковы

### Геометрическая вероятность

В классическом определении вероятности рассматривается полная группа **конечного числа** равновероятных событий. На практике же очень часто встречаются испытания с **бесконечным** (вообще говоря, несчетным) **числом** возможных исходов, поэтому в таких случаях классическое определение вероятности неприменимо. Тогда вводят понятие **геометрической вероятности**, т. е. вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости, часть тела и т.д.).

Рассмотрим, например, на плоскости некоторую область  $G$ , имеющую площадь  $S_G$ , и внутри области  $G$  область  $g$  с площадью  $S_g$ . Пусть в область  $G$  наудачу бросается точка. При этом попадание точки в область  $G$  – достоверное событие, а в  $g$  – случайное. Предполагается, что все точки области  $G$  **равноправны**, т. е. наудачу брошенная точка может попасть в любую точку области  $G$ , и вероятность события  $A$  – попадания точки в область  $g$  – пропорциональна площади этой области и не зависит от ее расположения и формы (рис.1).



**Геометрической вероятностью события А** называется отношение площади области g к площади области G, т. е.

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G} \quad (2)$$

Область g называется **благоприятствующей (благоприятной)** событию А.

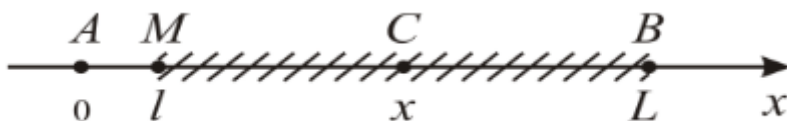
Область, на которую распространяется понятие геометрической вероятности, может быть одномерной (прямая, отрезок) и трехмерной (некоторое тело в пространстве). Обозначая меру (длину, площадь, объем) области через *mes*, можно записать

$$P(A) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G} \quad (3)$$

### Решение задач

**Пример 1.** В некоторой точке С линии АВ длины L произошел разрыв. Какова вероятность того, что точка С удалена от точки А на расстояние не меньше l?

*Решение.* Расположим отрезок АВ на числовой оси Ох так, как изображено



Пусть  $x$  – координата случайной точки  $C$  отрезка  $AB$ ,  $0 \leq x \leq L$ . Ясно, что исходов опыта (разрыв линии  $AB$  в точке  $C$ ) бесчисленное множество и все они равновозможны. На отрезке  $AB$  возьмем точку  $M$ , расстояние которой от точки  $A$ , равно  $l$ .

Очевидно, что событие  $A = \{\text{точка } C \text{ удалена от точки } A \text{ на расстояние не меньше } l\}$  произойдет, если точка  $C$  попадет на отрезок  $MB = [l, L]$ .

Таким образом, областью, благоприятствующей наступлению события  $A$  (на рис. 2 она заштрихована), является отрезок  $MB$ , а множеству исходов опыта соответствует отрезок  $AB = [0, L]$ .

Тогда по формуле (3)

$$P(A) = \frac{MB}{AB} = \frac{L - l}{L} = 1 - \frac{l}{L}.$$

**Пример 2.** (Задача о встрече). Два студента  $A$  и  $B$  условились встретиться в определенном месте во время перерыва между 13 ч и 13 ч 50 мин. Пришедший первым ждет другого в течение 10 мин., после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи, если приход каждого из них в течение указанных 50 минут может произойти наудачу и моменты прихода независимы?

**Решение.** Пусть  $x$  – время прихода студента  $A$ , а  $y$  – студента  $B$ . Ясно, что  $0 \leq x \leq 50$ ,  $0 \leq y \leq 50$ .

Будем рассматривать  $x$  и  $y$  как декартовы координаты на плоскости  $Oxy$ , выбрав в качестве единицы масштаба одну минуту. Тогда все возможные исходы изобразятся точками квадрата со стороной  $a=50$ , т.е.  $G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 50, 0 \leq y \leq 50\}$ .

Интересующее нас событие  $C = \{\text{студенты } A \text{ и } B \text{ встретятся}\}$  наступит тогда и только тогда, если разность между моментами их прихода будет не более 10 минут (по модулю), т. е.  $|y - x| \leq 10$ .

Неравенство  $|y - x| \leq 10$ , т. е.  $x - 10 \leq y \leq x + 10$  определяет благоприятствующую событию  $C$  область  $g$ , заштрихованную на рис.3.

Тогда по формуле (2) искомая вероятность равна

$$P(C) = \frac{S_g}{S_G} = \frac{50^2 - 40^2}{50^2} = 0,36.$$

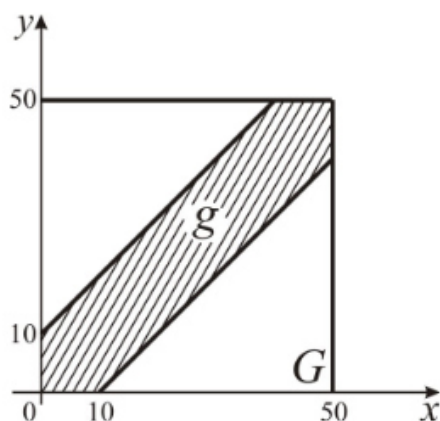


Рис. 3

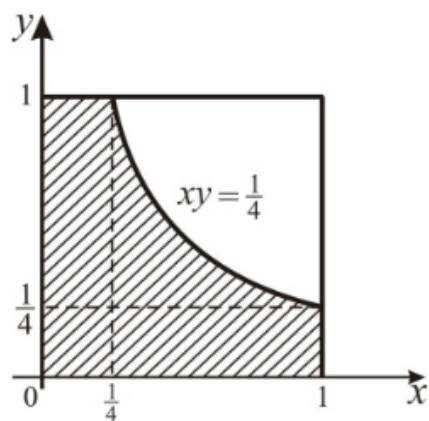


Рис. 4

### Задачи для самостоятельного решения

1. На плоскости проведены параллельные линии, расстояния между которыми попеременно равны 1,5 и 8 см. Определить вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса 2,5 см не будет пересечен ни одной линией.

2. Из последовательности чисел 1, 2, 3, 4, ..., 600 наудачу выбираются 2 числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше 126, а другое больше 126?

3. На отрезке  $[0,5]$  случайно выбирается точка. Найти вероятность того, что расстояние от нее до правого конца отрезка не превосходит 1,6 единиц.

4. В круг радиуса  $R$  вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, брошенная в этот круг, попадет в данный треугольник.

5. Стержень длины 1 разломан в двух наугад выбранных точках. Найти вероятность того, что из полученных отрезков можно составить треугольник.

6. На отрезке  $AB$  длиной 1 наудачу поставлены две точки  $L$  и  $M$ . Найти вероятность того, что точка  $L$  будет ближе к точке  $M$ , чем к точке  $A$ .

7. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не больше единицы, не превзойдет единицы, а их

произведение будет не больше  $\frac{2}{9}$ ?

8. В прямоугольник  $5 \times 4$  см<sup>2</sup> вписан круг радиуса 1,5 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

9. Какова вероятность Вашей встречи с другом, если вы договорились встретиться в определенном месте, с 12.00 до 13.00 часов и ждете друг друга в течение 5 минут?

10. На отрезок АВ длины  $L$ , брошена точка  $M$  так, что любое ее положение на отрезке равновозможно. Найти вероятность того, что меньший из отрезков ( $AM$  или  $MB$ ) имеет длину, большую чем  $L/3$ .

11. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не больше трех, не превзойдет трех, а их произведение будет не больше  $2/7$ ?

12. Наудачу взяты два положительных числа  $x$  и  $y$ , каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма  $x + y$  не превышает единицы, а произведение  $xy$  не меньше  $0,09$ .

13. На отрезке АВ длиной  $l$  независимо одна от другой поставлены 2 точки  $L$  и  $M$ , положение каждой из которых равновозможно на АВ. Найти вероятность того, что точка  $L$  будет ближе к точке  $M$ , чем к точке  $A$ .

14. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени от  $T_1$  до  $T_2$ . Одно из событий длится 10 мин., другое –  $t$  мин. Определить вероятность того, что: а) события «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».  $T_1=1100$ ;  $T_2=1300$ ;  $t=15$ .

**Практическая работа №7** «Решение задач на распределение дискретной случайной величины заданной содержательным образом

Задача 1. Дискретная случайная величина  $X$  задана законом распределения

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x$ | 1   | 3   | 6   | 8   |
| $P$ | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,3 |

Построить многоугольник распределения.

Задача 2. Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения числа появлений шестерки.

Решение.

Вероятность выпадения шестерки при одном бросании кости равна  $(1/6)$ .

Вероятность невыпадения шестерки равна

$$1 - (1/6) = 5/6$$

Значения случайной величины:

$$x_1 = 0$$

Вероятность того, что и на первой кости и на второй и третьей шестерка не выпала равна:

$$p_1 = (5/6) \cdot (5/6) \cdot (5/6) = 125/216$$

$$x_2 = 1$$

Вероятность того, что или первой или на второй или третьей выпала шестерка равна:

$$p_2 = (1/6) \cdot (5/6) \cdot (5/6) + (5/6) \cdot (1/6) \cdot (5/6) + (5/6) \cdot (5/6) \cdot (1/6) = 75/216$$

$$x_3 = 2$$

Вероятность того что или на первой и второй или на второй и третьей или на первой и третьей кости выпала шестерка равна:

$$p_3 = (1/6) \cdot (1/6) \cdot (5/6) + (5/6) \cdot (1/6) \cdot (1/6) + (1/6) \cdot (5/6) \cdot (1/6) = 15/216$$

$$x_4 = 3$$

Вероятность того, что и на первой кости и на второй кости и на третьей кости выпала шестерка равна:

$$p_4 = (1/6) \cdot (1/6) \cdot (1/6) = 1/216$$

Проверка, что все вычислено верно:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

Составляем таблицу:

|   |                   |                  |                  |                 |
|---|-------------------|------------------|------------------|-----------------|
| X | 0                 | 1                | 2                | 3               |
| P | $\frac{125}{216}$ | $\frac{75}{216}$ | $\frac{15}{216}$ | $\frac{1}{216}$ |

Задача 3.

Задача 2. Составить закон распределения числа попаданий в цель при четырех выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,9.

Решение. Случайная величина  $X$  – число попаданий в цель при четырех выстрелах – может принимать значения 0,1,2,3,4, а соответствующие им вероятности находим по формуле Бернулли:

$$P(X = 0) = C_4^0 0,9^0 0,1^4 = 0,0001;$$

$$P(X = 1) = C_4^1 0,9^1 0,1^3 = 0,0036;$$

$$P(X = 2) = C_4^2 0,9^2 0,1^2 = 0,0484;$$

$$P(X = 3) = C_4^3 0,9^3 0,1^1 = 0,2916;$$

$$P(X = 4) = C_4^4 0,9^4 0,1^0 = 0,6561$$

Закон распределения числа попаданий в цель при четырех выстрелах

|   |        |        |        |         |        |
|---|--------|--------|--------|---------|--------|
| X | 0      | 1      | 2      | 3       | 4      |
| p | 0,0001 | 0,0036 | 0,0486 | 0,29116 | 0,6561 |

«Решение задач на распределение дискретной случайной величины заданной содержательным образом»

1. Задан закон распределения дискретной случайной величины  $X$ :

|       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $m_i$ | 0     | 1     | 2     | 3     |
| $p_i$ | 0,064 | 0,288 | 0,432 | 0,216 |

Найти: а) математическое ожидание  $MX$ ; б) дисперсию  $DX$ ; в) среднее квадратическое отклонение  $\sigma_x$ .

2. Случайная величина  $X$  задана законом распределения:

|       |       |     |      |
|-------|-------|-----|------|
| $m_i$ | 10    | 15  | 25   |
| $p_i$ | 10/28 | $p$ | 3/28 |

Найти: а) значение вероятности для второй случайной величины; б) математическое ожидание  $MX$ ; в) дисперсию  $DX$ .

3. Задан закон распределения дискретной случайной величины  $X$ :

|       |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| $m_i$ | 20  | 21  | 22  | 23  |
| $p_i$ | 0,1 | 0,3 | 0,2 | $p$ |

Найти: а) значение вероятности для четвертой случайной величины; б) математическое ожидание  $MX$ ; в) дисперсию  $DX$ . [а) 0,4 б) 21,90 в) 1,90]

4. Задан закон распределения дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$ :

|       |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $m_i$ | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|



|         |      |      |      |      |     |
|---------|------|------|------|------|-----|
| $p_x^i$ | 0,15 | 0,20 | 0,35 | 0,1  | 0,2 |
| $p_y^i$ | 0,1  | 0,15 | 0,3  | 0,05 | 0,4 |

Сравнить а) математические ожидания  $MX$  и  $MY$  и б) стандартные отклонения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ .

5. Случайная величина  $X$  задана законом распределения:

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $m_i$ | 0   | 3   | $x$ |
| $p_i$ | 0,2 | 0,4 | $p$ |

Найти третье значение случайной величины и его вероятность, если известно, что ее математическое ожидание равно 4.

6. Распределение дискретной случайной величины  $X$  содержит неизвестные значения  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ):

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| $m_i$ | $x_1$ | $x_2$ |
| $p_i$ | 0,4   | 0,6   |

Известны числовые характеристики случайной величины:  $MX = 3,6$ ;  $DX = 0,24$ .  
Требуется

### Практическая работа №8 «Понятие биномиального распределения и его применение».

Задача 1. Вероятность попадания в цель составляет при отдельном выстреле  $p=0,8$ . Найдите вероятность пяти попаданий при шести выстрелах

Задача 2 Всхожесть семян данного сорта растений составляет 80%. Какова вероятность того, что из 5 посеянных семян взойдет не меньше 4.

Задача 3.

По данным ОТК на 100 металл т ее к их брусков, подготовленных для обработки, приходится 30 с зазубринами. Какова вероятность того, что из случайно взятых 7 брусков окажется без дефектов не более 2?

Задача 4.

Проверкой качества установлено, что из каждых 100 деталей не имеют дефектов 75 штук в среднем. Составить биномиальное распределение вероятностей числа пригодных деталей из взятых наудачу 6 деталей.



**Задача 5.** В городе 4 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 20%. Составьте ряд распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года.

**Задача 6.** Контрольная работа состоит из трех вопросов. На каждый вопрос приведено четыре варианта ответа, один из которых правильный. Составить закон распределения числа правильных ответов при простом угадывании. Найти  $M(X)$ ,  $D(X)$ .

**Задача 7.** Стрелок производит 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. За каждое попадание стрелку засчитывается 10 очков. Найти закон распределения числа засчитанных очков.

**Практическая работа №9** «Понятие геометрического распределения и его применение»

**Геометрическое распределение**

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события  $A$  равна  $p$  ( $0 < p < 1$ ) и, следовательно, вероятность его не появления  $q=1-p$ . Испытания заканчиваются, как только появится событие  $A$ . Таким образом, если событие  $A$  появилось в  $k$ -м испытании, то в предшествующих  $k-1$  испытаниях оно не появлялось. Обозначим через  $X$  дискретную случайную величину — число испытаний, которые нужно провести до первого появления события  $A$ . Очевидно, возможными значениями  $X$  являются натуральные числа:  $x_1=1, x_2=2, \dots$ . Пусть в первых  $k-1$  испытаниях событие  $A$  не наступило, а в  $k$ -м испытании появилось. Вероятность этого «сложного события», по теореме умножения вероятностей независимых событий,  $P(X=k)=q^{k-1}p$ . Полагая  $k=1, 2, \dots$ , получим геометрическую прогрессию с первым членом  $p$  и знаменателем  $q$  ( $0 < q < 1$ ):  $p, qp, q^2p, \dots, q^{k-1}p, \dots$ . По этой причине распределение называют **геометрическим**.

**Пример.** Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель  $p = 0,6$ . Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле. Решение. По условию,  $p=0,6, q = 0,4, k=3$ . Искомая вероятность по формуле  $P = q^{k-1}p = 0,4^2 \cdot 0,6 = 0,096$ .

## Пример с решением №2

Проводится проверка большой партии деталей до обнаружения бракованной (без ограничения числа проверенных деталей). Составить закон распределения числа проверенных деталей. Найти его математическое ожидание и дисперсию, если известно, что вероятность брака для каждой детали равна 0,1.

### Решение:

Случайная величина  $X$  — число проверенных деталей до обнаружения бракованной — имеет геометрическое распределение (4.11) с параметром  $p=0,1$ . Поэтому ряд распределения имеет вид

|        |       |     |      |       |        |     |                   |     |
|--------|-------|-----|------|-------|--------|-----|-------------------|-----|
| $X=m:$ | $x_i$ | 1   | 2    | 3     | 4      | ... | $m$               | ... |
|        | $p_i$ | 0,1 | 0,09 | 0,081 | 0,0729 | ... | $0,9^m \cdot 0,1$ | ... |

По формулам (4.12) и (4.13)

$$M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,1} = 10, \quad D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0,9}{0,1^2} = 90. \blacktriangleright$$

---

## Задача

Студент подготовил из 40 экзаменационных билетов 32 и мечтает, что преподаватель разрешит ему выбрать выученный билет. Составить ряд распределений числа  $X$  возможных попыток взять билет до появления первого «знакомомого» билета, если преподаватель остановил студента после четвертой попытки. Найти числовые характеристики этой случайной величины.

Решение. Вероятность того, что студент возьмет выученный билет, равна 0,8. Случайная величина  $X$  — число испытаний до появления первого выученного билета. Составим ряд распределений, найдем функцию распределения ДСВ  $X$ , построим ее график. Найдем все числовые характеристики (ограничиться тремя-пятью испытаниями).

Обозначим через  $n$  — число «испытаний», через  $p$  — вероятность взять выученный билет. Тогда  $p=0,8$ ,  $q=1-p=0,2$ . Найдем вероятности  $p_4(1)$ ,  $p_4(2)$ ,  $p_4(3)$ ,  $p_4(4)$ .

Так как случайная величина  $X$  — число возможных попыток до появления первого выученного билета, воспользуемся геометрической вероятностью:

$$P_4(1) = p = 0,8;$$

$$P_4(2) = qp = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16;$$

$$P_4(3) = q^2p = 0,2^2 \cdot 0,8 = 0,04 \cdot 0,8 = 0,032;$$

$$P_4(4) = q^3p = 0,2^3 \cdot 0,8 = 0,008 \cdot 0,8 = 0,0064.$$

|       |     |      |       |        |
|-------|-----|------|-------|--------|
| $x_i$ | 1   | 2    | 3     | 4      |
| $p_i$ | 0,8 | 0,16 | 0,032 | 0,0064 |

Математическое ожидание  $M(X) = \frac{1}{p} = 1,25;$

дисперсия  $D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0,2}{0,64} = 0,03125;$

среднеквадратическое отклонение  $\sigma = \sqrt{0,03125} = 0,176.$

Почему в рассмотренной задаче не выполняется условие нормировки:

$$\sum_{k=1}^4 p_k = 0,9984 \neq 1?$$

Дело в том, что в случае геометрических распределений условие нормировки выполняется при  $k \rightarrow \infty$ , а в рассмотренной задаче были даны лишь четыре первые значения ДСВ  $X$ .

$$P(3 \leq X \leq 6) = \sum_{i=3}^6 P(X=i) = \\ = 0,02244 + 0,00137 + 0,00003 + 0,0000001 = 0,02384 \approx 0,024.$$

По формулам (4.15) и (4.16)

$$M(X) = 6 \cdot \frac{6}{45} = 0,8; \quad D(X) = 6 \cdot \frac{39}{44} \left(1 - \frac{39}{45}\right) \left(1 - \frac{6}{45}\right) = 0,6145.$$

Таким образом, среднее число угаданных видов спорта из 6 всего 0,8, а вероятность выигрыша только 0,024. ►

Задания для самостоятельного решения

**Пример с решением.** В лотерее «Спортлото 6 из 45» денежные призы получают участники, угадавшие 3, 4, 5 и 6 видов спорта из отобранных случайно 6 видов из 45 (размер приза увеличивается с увеличением числа угаданных видов спорта). Найти закон распределения случайной величины  $X$  — числа угаданных видов спорта среди случайно отобранных шести. Какова вероятность получения денежного приза? Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ .

Решение. Очевидно (см. гл. 1, пример 1.14), что число угаданных видов спорта в лотерее «6 из 45» есть случайная величина, имеющая гипергеометрическое распределение с параметрами  $n = 6$ ,  $M = 6$ ,  $N = 45$ . Ряд ее распределения, рассчитанный по формуле (4.14), имеет вид:

|      |       |         |         |         |         |         |         |           |
|------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-----------|
| $X:$ | $x_i$ | 0       | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6         |
|      | $p_i$ | 0,40056 | 0,42413 | 0,15147 | 0,02244 | 0,00137 | 0,00003 | 0,0000001 |

Вероятность получения денежного приза  
n

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1 Кубик подбрасывается до тех пор, пока не выпадет 6 очков. Найти вероятность, что выпадение 6 очков случится за 5 бросков.

Решение:

Для первого броска ( $k = 1$ ), вероятность успеха  $p(1) = 1/6$ .

Для второго ( $k = 2$ ) это вероятность успеха во втором броске и неудачи в первом по формуле (14):

$$P(2) = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{2-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36} = 0,139$$

для третьего броска:

$$P(3) = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-1} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{36} = \frac{25}{216} = 0,116$$

для четвертого броска:

$$P(4) = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-1} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{125}{216} = \frac{125}{1296} = 0,096$$

для пятого броска:

$$P(5) = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-1} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{1}{6} \cdot \frac{625}{1296} = \frac{625}{7776} = 0,08$$

*Ответ:* вероятность, что выпадение 6 очков случится за 5 бросков равна 0,08.

*Задача 2* Ролик кодового замка содержит 7 возможных цифр, из которых нужно выбрать одну. Какова вероятность, что его можно открыть точно с 3-го раза.

*Решение:*

$$p = \frac{1}{7} = 0,14$$

Вероятность правильного единичного выбора

Распределение геометрическое значит искомую вероятность найдем по формуле (14)

$$P(3) = \frac{1}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right)^{3-1} = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{1}{7} \cdot \frac{36}{49} = \frac{36}{343} = 0,105$$

Если замок состоит из нескольких независимых роликов, то вероятность его случайного открывания подчиняется уже другому распределению – биномиальному.

*Ответ:* вероятность, что замок откроется точно с 3-го раза равна 0,105.

*Задача 3* Контроль качества партии продукции проводится до обнаружения первого бракованного изделия. В результате серии проверок обнаружили, что бракованное изделие впервые появлялось в среднем при десятом испытании. Оценить вероятность появления брака.

*Решение:*

Пусть  $X$  – число испытаний до первого появления бракованного изделия.  $X$  случайная величина имеет геометрическое распределение. По условию ее среднее значение равно  $M(X) = 10$

Так как  $M(X) = \frac{1}{p}$ , то  $p = \frac{1}{M(X)} = \frac{1}{10} = 0,1$ .

Ответ: вероятность появления брака равна 0,1.

Гипергеометрическое распределение имеют случайные величины, которые имеют место при выборочном контроле некоторой совокупности  $N$  объектов по некоторому определенному свойству. Для каждого рассматриваемого объекта дают ответ на вопрос - обладает он свойством  $A$ , или нет. Гипергеометрическое распределение имеет случайная величина  $X$ , равная числу объектов, обладающих свойством  $A$  в случайной выборке объема  $n$ , где  $n < N$ .

Например:

ü число некачественных единиц изделий в случайной совокупности объема  $n$  из партии объема  $N$ , если  $n < N$ ;

ü лотерея, в которой свойство  $A$  билета – это «быть выигрышным», тогда всего билетов  $N$ , а некоторое лицо приобрело  $n$  из них, в этом случае число выигрышных билетов у этого лица имеет гипергеометрическое распределение.

Таким образом, гипергеометрическое распределение - дискретная случайная величина  $X$  состоящая в том, что в выборке из  $N$  объектов, из которых  $m$  обладают свойством  $A$ , будет именно  $k$ , обладающих свойством  $A$ , в выборке из  $n$  конкретных объектов взятых из совокупности.

$$P(X = m) = \frac{C_k^m C_{n-k}^{N-m}}{C_k^N} \quad (17)$$

При этом  $m$  объектов обладают свойством  $A$ ,  $k$  – объектов попало в выборку, всего попало в выборку  $n$  элементов из  $N$ .

Таким образом, гипергеометрическое распределение определяется тремя параметрами – объемом генеральной совокупности  $N$ , числом объектов  $m$  в ней, обладающих рассматриваемым свойством  $A$ , и объемом выборки  $n$ .

Основные числовые характеристики гипергеометрического распределения:

1) математическое ожидание

$$M(X) = n \frac{m}{N} \quad (18)$$

2) дисперсия

$$D(X) = n \frac{m}{N} \left( 1 - \frac{m}{N} \right) \left( 1 - \frac{n-1}{N-1} \right) \quad (19)$$

*Задача 4.* В ящике 7 шаров, из которых 4 белых, а остальные черные. Из этого ящика наугад извлекаются 3 шара;  $m$  – число извлеченных белых шаров. Найти закон распределения дискретной случайной величины  $m$  и вероятность события  $X > 1$ .

*Решение.*

Возможные значения случайной величины  $X$  -  $m=0,1,2,3$ . Соответствующие им вероятности подсчитываем по формуле (17):

$$p_0 = P(X=0) = \frac{C_4^0 C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}$$

$$p_1 = P(X=1) = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}$$

$$p_2 = P(X=2) = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}$$

$$p_3 = P(X=3) = \frac{C_4^3 C_3^0}{C_7^3} = \frac{4}{35}$$

Таким образом закон распределения  $X$ :

Для проверки правильности построения закона распределения дискретной случайной величины найдем сумму вероятностей:

$$\frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = 1, \text{ получили } 1 \text{ значит вычисления верные.}$$

Теперь найдем вероятность события  $X > 1$ :

$$P(X > 1) = p_2 + p_3 = \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = \frac{22}{35}$$

*Ответ:* вероятность того, что число белых шаров больше одного равно  $\frac{22}{35}$ .

## Непрерывная случайная величина и её функция распределения. Функция плотности распределения

О непрерывной случайной величине (НСВ) я неоднократно упоминал в предыдущих статьях, и поэтому, если вы зашли с поисковика и/или не совсем в теме, то начните с первого урока о **случайных величинах**. После чего продолжаем и сразу вспоминаем разницу:

– В отличие от **дискретной случайной величины**, НСВ может принять **любое действительное** значение из некоторого промежутка ненулевой длины, что делает невозможным её представление в виде таблицы (*т.к. действительных чисел несчётно много*). В этой связи непрерывную случайную величину задают функциями двух типов, названия которых вы видите в заголовке.

**Функция распределения** непрерывной случайной величины  $X$  определяется точно так же, как и **функция распределения ДСВ**:

$F(x) = P(X < x)$  – вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем переменная  $x$ , которая «пробегает» все значения от «минус» до «плюс» бесконечности. Таким образом, учитываются все значения, которые В ПРИНЦИПЕ может принять произвольная случайная величина. С увеличением  $x$  функция распределения «накапливает» (суммирует) вероятности, а значит, является **неубывающей** и изменяется в пределах  $0 \leq F(x) \leq 1$ . По этой причине её иногда называют **интегральной** функцией распределения.

**Важной особенностью** является тот факт, что функция распределения ЛЮБОЙ непрерывной случайной величины **всегда и всюду непрерывна!** Часто её можно встретить в **кусочном** виде, например:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ \frac{x^2}{9}, & \text{если } 0 \leq x \leq 3 \\ 1, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

однако в точках «стыка» всё хорошо:

$$F(0) = \frac{0^2}{9} = 0, \quad F(3) = \frac{3^2}{9} = 1$$

**и если там разрыв**, то вы имеете дело с опечаткой или откровенной ошибкой!

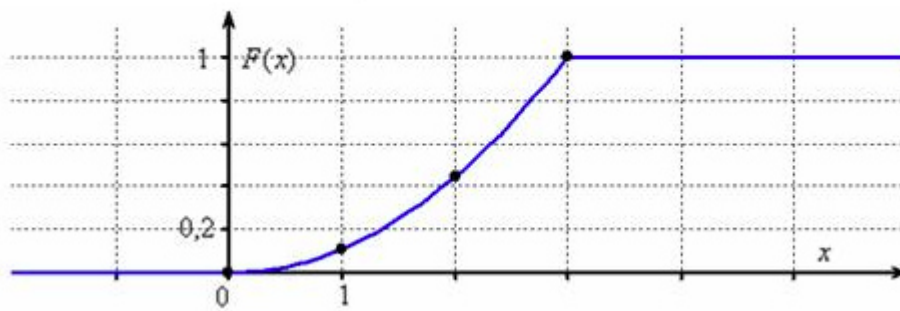
**! Но** сама по себе **непрерывность** и ноль слева, единица справа – ещё не означают, что перед нами функция распределения.

При ручном построении чертежа целесообразно найти опорные точки; в нашем примере

удобно взять:  $F(1) = \frac{1^2}{9} \approx 0,11$ ,  $F(2) = \frac{2^2}{9} \approx 0,44$  и плавно-плавно провести карандашом



кусочек **параболы**  $y = \frac{x^2}{9}$  :



Напоминаю, что левый нижний луч следует прочертить жирно (чтобы он не сливался с осью), а правый верхний луч продолжить за острие оси (т.к. график бесконечен). Также не забываем, что  $F(x)$  **не может убывать**, и если вдруг окажется, что какой-то кусок графика идёт «сверху вниз», то ищите ошибку или опять же – имеет место опечатка. А может просто дрогнула рука :)

Что касемо масштаба, то смотрим по ситуации, чаще всего оптимальный масштаб составляет 1 ед. = 1 см (две клетки), но поскольку я строю графики не от руки, то особо не слежу за пропорциями – в данном случае по оси ординат вышло примерно в 2 раза больше, чем по оси абсцисс.

Теперь вернёмся к смыслу функции распределения и рассмотрим пару конкретных «икс»:

$F(-1) = P(X < -1) = 0$  – вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем  $-1$ ;

$F(4) = P(X < 4) = 1$  – вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем 4.

Ну, и очевидно, что рассматриваемая случайная величина принимает *случайные, наперёд неизвестные* значения из отрезка  $[0; 3]$ . Если вкладывать в задачу содержательный смысл, то это может быть случайная продолжительность некоего процесса (в секундах, например), или масса либо размер случайно выбранного объекта (например, крупинки песка). И тому подобное – примеров масса. Конкретные задачи непременно будут, но прежде остановимся на технической стороне вопроса.

Вероятность того, что случайная величина примет значение из некоторого промежутка рассчитывается **ещё проще, чем для дискретной случайной величины**. Здесь нет никакой Санта-Барбары: отрезок ли  $[a; b]$  нам дан, полуинтервал  $(a; b]$ ,  $[a; b)$  или интервал  $(a; b)$ , соответствующую вероятность можно вычислить по единой формуле:

$$F(b) - F(a)$$

**Примечание:** в следующем параграфе мы обоснуем это утверждение

Например:

$$P(0 \leq X \leq 1) = F(1) - F(0) = \frac{1^2}{9} - \frac{0^2}{9} = \frac{1}{9} \text{ – вероятность того, что случайная величина примет}$$

значение из отрезка  $[0; 1]$ . И точно такими же будут вероятности

$$P(0 < X \leq 1), P(0 \leq X < 1), P(0 < X < 1);$$

$$P(2 \leq X \leq 3) = F(3) - F(2) = \frac{3^2}{9} - \frac{2^2}{9} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \text{ – вероятность того, что случайная величина}$$

примет значение из отрезка  $[2; 3]$ ;

$$P(-1 < X < 4) = F(4) - F(-1) = 1 - 0 = 1 \text{ – вероятность того, что случайная величина примет}$$

значение из интервала  $(-1; 4)$ ;

и так далее.

Актив  
Чтобы ак  
"Параме"

Наверное, вы подметили, что на участках одинаковой длины результаты получились разными:  $P(0 \leq X \leq 1) = \frac{1}{9}$ ,  $P(2 \leq X \leq 3) = \frac{5}{9}$ . И возникает вопрос: как оценить эту

«концентрацию» вероятностей на различных промежутках? – ведь функция распределения  $F(x)$  характеризует *накопление* вероятностей по мере увеличения  $x$ , и много раз вычислять  $F(b) - F(a)$  что-то неохота.

Эффективный ответ на поставленный вопрос даёт

## функция ПЛОТНОСТИ распределения вероятностей

или дифференциальная функция распределения. Она представляет собой производную функции распределения:  $f(x) = F'(x)$ .

**Примечание:** для дискретной случайной величины такой функции не существует

В нашем примере:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} (0)', & \text{если } x < 0 \\ \left(\frac{x^2}{9}\right)', & \text{если } 0 \leq x \leq 3 \\ (1)', & \text{если } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ \frac{2x}{9}, & \text{если } 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

То есть, всё очень просто – берём производную от каждого куска, и порядок.

Но настоящий порядок состоит в том, что несобственный интеграл от  $f(x)$  с пределами интегрирования от «минус» до «плюс» бесконечности:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$  – равен единице, и строго единице. В противном случае перед нами не функция плотности, и если эта функция найдена как производная, то  $F(x)$  – не является функцией распределения (несмотря на какие бы то ни было другие признаки).

Проверим «подлинность» наших функций. Если случайная величина  $X$  принимает значения из конечного промежутка, то всё дело сводится к вычислению определённого интеграла. В силу свойства аддитивности:

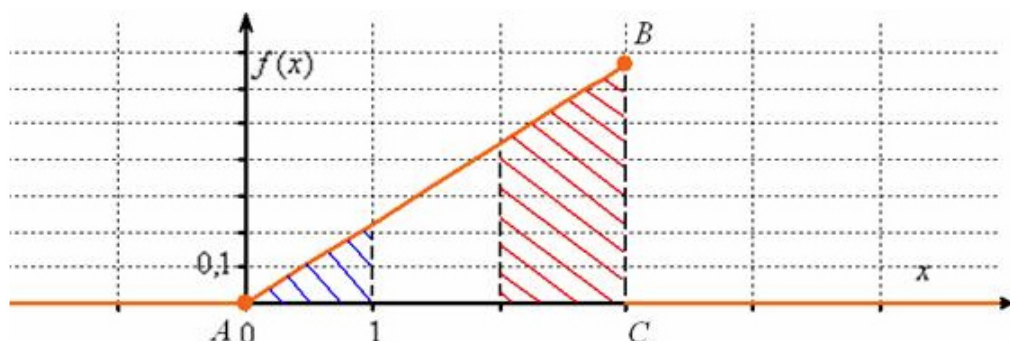
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^3 \frac{2x}{9} dx + \int_3^{+\infty} 0 \cdot dx$$

Совершенно понятно, что левый и правый интегралы равны нулю и нам осталось вычислить:

$$\frac{2}{9} \int_0^3 x dx = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_0^3 = \frac{1}{9} (9 - 0) = 1, \text{ что и требовалось проверить. С вероятностной точки зрения}$$

это означает, что случайная величина  $X$  достоверно примет одно из значений отрезка  $[0; 3]$ . Геометрически же это означает, что площадь между осью  $OX$  и графиком  $f(x)$  равна единице, в данном случае речь идёт о площади треугольника  $ABC$ . Сторона  $AB$  является фрагментом прямой  $y = \frac{2x}{9}$  и для её построения достаточно найти точку

$$y(3) = \frac{2 \cdot 3}{9} = \frac{2}{3} \approx 0,67:$$



Ну вот, стало всё наглядно – где большая площадь, там и более вероятные значения. Так как функция плотности «собирает под собой» вероятности, то она тоже неотрицательна ( $f(x) \geq 0$ ) и её график не может располагаться ниже оси  $OX$ . Следует также отметить, что в общем случае эта функция разрывна (следим, где «жирные» точки!).

## Задание

Теперь разберём весьма любопытный факт: поскольку действительных чисел **несчётно много**, то вероятность того, что случайная величина  $X$  примет какое-то конкретное значение *стремится к нулю*. И поэтому вероятности рассчитывают не для отдельно взятых точек, а для целых промежутков (*пусть даже очень малых*). Как вы правильно догадались:

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{9} \int_0^1 xdx = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{9} (1 - 0) = \frac{1}{9} \text{ (синяя площадь на чертеже) } -$$

вероятность того, что случайная величина примет значение из отрезка  $[0; 1]$ ;

$$P(2 \leq X \leq 3) = \frac{2}{9} \int_2^3 xdx = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_2^3 = \frac{1}{9} (9 - 4) = \frac{5}{9} \text{ (красная площадь) } - \text{ вероятность того, что}$$

случайная величина примет значение из отрезка  $[2; 3]$ .

По той причине, что отдельно взятые значения можно не принимать во внимание, с помощью этих же интегралов рассчитываются и вероятности по интервалам / полуинтервалам, в частности:

$$P(0 < X \leq 1) = P(0 \leq X < 1) = P(0 < X < 1) = \frac{2}{9} \int_0^1 xdx = \frac{1}{9}$$

Этим же объясняется аналогичная «вольность» с функцией  $F(x)$ .

Возможно, кто-то спросит: *а зачем считать интегралы, если есть функция  $F(x)$ ?*

А дело в том, что во многих задачах непрерывная случайная величина ИЗНАЧАЛЬНО задана функцией  $f(x)$  плотности распределения, которая ТОЖЕ однозначно определяет случайную величину. Но, как вариант, можно сначала найти функцию  $F(x)$  (с помощью тех же интегралов), после чего использовать «лёгкий способ» бросить курить отыскания вероятностей. Впрочем, об этом чуть позже.

## Задание 1 для самостоятельного решения.

### Задание

Непрерывная случайная величина  $X$  задана своей функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq c \\ \frac{(x+1)^3}{8}, & \text{если } c < x \leq d \\ 1, & \text{если } x > d \end{cases}$$

Найти значения  $c, d$  и функцию  $f(x) = F'(x)$ . Проверить, что  $f(x)$  действительно является функцией плотности распределения. Вычислить вероятности  $P(-1 \leq X < 0)$ ,  $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$ .

Построить графики  $F(x), f(x)$ .

Тренируемся самостоятельно! Если возникнут затруднения, то внимательно перечитайте вышеизложенный материал. Краткое решение и ответ в конце урока.

Вообще, типовые задачи на непрерывную случайную величину можно разделить на 2 большие группы: **1)** когда дана функция  $F(x)$ , **2)** когда дана функция  $f(x)$ .

В первом случае не составляет никаких трудностей отыскать функцию плотности распределения – почти всегда **производные** не то что просты, а примитивны (в чём мы недавно убедились). Но вот когда НСВ задана функцией  $f(x)$ , то нахождение функции распределения – есть более кропотливый процесс:

## Решение 1

*Пример 1. Решение:* в силу непрерывности функции распределения:

$$\frac{(c+1)^3}{8} = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$\frac{(d+1)^3}{8} = 1 \Rightarrow (d+1)^3 = 8 \Rightarrow d = 1$$

Таким образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -1 \\ \frac{(x+1)^3}{8}, & \text{если } -1 < x \leq 1 \\ 1, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Контроль: } F(-1) = \frac{(-1+1)^3}{8} = 0, \quad F(1) = \frac{(1+1)^3}{8} = \frac{2^3}{8} = 1$$

Найдём функцию плотности распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -1 \\ \frac{3(x+1)^2}{8}, & \text{если } -1 < x \leq 1 \\ 0, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

Покажем, что  $f(x)$  действительно является функцией плотности:

1) Для любого значения  $x$ :  $f(x) \geq 0$ , в частности, на среднем промежутке:

$$\frac{3(x+1)^2}{8} \geq 0$$

**Внимание!** Без 1-го пункта обойтись нельзя!

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \frac{3}{8} \int_{-1}^1 (x+1)^2 dx + \int_1^{+\infty} 0 \cdot dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} (x+1)^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{8} (8 - 0) = 1$$

Таким образом, найденная функция действительно является функцией плотности распределения.

Требуемые вероятности выгоднее вычислить с помощью функции распределения:

$$P(-1 \leq X < 0) = F(0) - F(-1) = \frac{(0+1)^3}{8} - 0 = \frac{1}{8} - \text{вероятность того, что случайная}$$

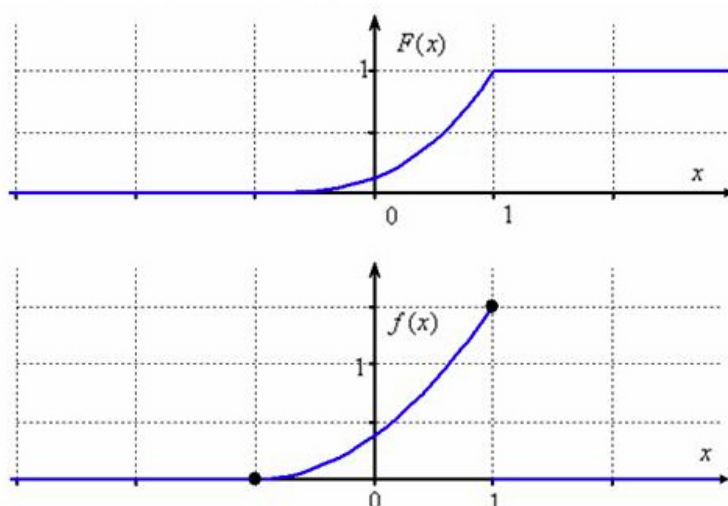
величина примет значение из полуинтервала  $[-1; 0)$ ;

$$P\left(X > \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2} < X < +\infty\right) = F(+\infty) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}+1\right)^3}{8} = 1 - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 =$$

$$= 1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{27}{8} = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} - \text{вероятность того, что случайная величина примет}$$

значение, больше, чем  $\frac{1}{2}$ .

Построим графики  $F(x), f(x)$  :



### Задание 3

Задана плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины  $X$  :

$$f(x) = \begin{cases} Ax, & \text{если } x \in [1; 5) \\ 0, & \text{если } x \notin [1; 5) \end{cases}$$

Требуется:

- 1) определить коэффициент  $A$ ;
- 2) найти функцию распределения  $F(x)$ ;
- 3) построить графики  $f(x), F(x)$ ;
- 4) найти вероятность того, что  $X$  примет значение из промежутка  $[1; 3)$

### Решение

1) По свойству функции плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

В данной задаче:

$$A \int_1^5 x dx = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\int_1^5 x dx}$$

$$\int_1^5 x dx = \frac{1}{2} (x^2) \Big|_1^5 = \frac{1}{2} (25 - 1) = \frac{24}{2} = 12 \Rightarrow A = \frac{1}{12}$$

Таким образом, искомая плотность:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{x}{12}, & 1 \leq x < 5; \\ 0, & x \geq 5 \end{cases}$$



2) Функцию распределения найдём с помощью формулы  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$ :

– если  $x < 1$ , то  $f(x) = 0$  и  $F(x) = \int_{-\infty}^x 0dx = 0$ ;

– если  $1 \leq x < 5$ , то  $f(x) = \frac{x}{12}$  и  $F(x) = \int_{-\infty}^1 0dx + \frac{1}{12} \int_1^x xdx = 0 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^x = \frac{1}{24}(x^2 - 1)$ ;

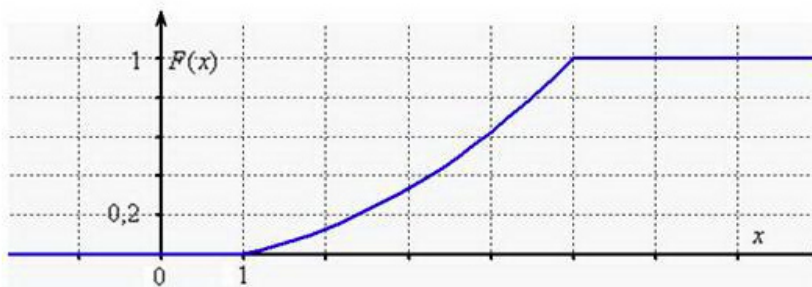
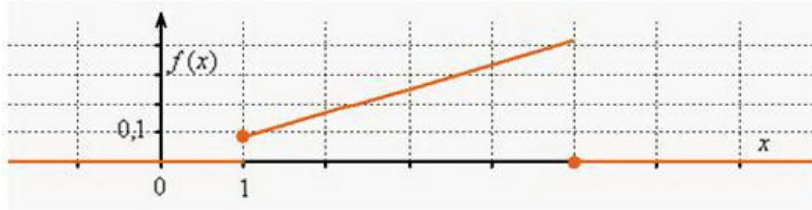
– если  $x \geq 5$ , то  $f(x) = 0$  и:

$$F(x) = \int_{-\infty}^1 0dx + \frac{1}{12} \int_1^5 xdx + \int_5^x 0dx = 0 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^5 + 0 = \frac{1}{24}(25 - 1) = \frac{1}{24} \cdot 24 = 1.$$

Таким образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{(x^2 - 1)}{24}, & 1 \leq x < 5; \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

3) Выполним чертежи:



4) Найдём вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение из промежутка  $[1; 3]$ :

$$P(1 \leq X < 3) = F(3) - F(1) = \frac{(3^2 - 1)}{24} - \frac{(1^2 - 1)}{24} = \frac{8}{24} - 0 = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

Задание 4.

Непрерывная случайная величина  $X$  задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 2a, & -1 < x \leq 1 \\ a, & 1 < x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Найти значение  $a$  и построить график плотности распределения. Найти функцию распределения вероятностей  $F(x)$  и построить её график. Вычислить вероятность  $P(0 < X < 2)$ .

### **Практическая работа №11 «Вычисление характеристик нсв, заданной своим распределением»**

1. Во время грозы на участке между 30-м и 70-м километрами телефонной линии произошёл обрыв провода. Считая, что обрыв одинаково возможен в любой точке, найти вероятность того, что обрыв расположен между 40-м и 45-м километрами.
2. На 400-километровом участке газопровода между компрессорными станциями  $A$  и  $B$  происходит утечка газа, которая одинаково возможна в любой точке газопровода. Найти вероятность, того, что утечка расположена не далее 20 км от  $A$  или  $B$ .
3. На отрезке  $[-4, 8]$  наудачу взято число. Какова вероятность того, что: а) это число попадет в диапазон от 5 до 6; б) число будет меньше нуля.
4. Вероятность попадания случайной величины, распределенной по равномерному закону на  $(-5, 15)$  в часть интервала  $(8; \beta)$  равна  $1/10$ . Найти правую границу интервала  $\beta$ .

### **Задачи на вычисление медианы НСВ**

1. Обвал одинаково возможен в любой точке на горной дороге от 30 км до 90 км. Вероятность того, что обвал произойдет в интервале от конца или начала дороги равен  $1/5$ . Найти эти интервалы.
2. Все значения равномерно распределённой случайной величины расположены на отрезке  $[12; 28]$ . Найти вероятности её попадания: а) на отрезок  $[24; 28]$ ; б) в интервал  $(13; 15)$ .
3. Ёмкость цистерны для хранения бензина на автозаправочной станции равна 50 т. Найти вероятности событий, состоящих в том, что при случайной проверке в цистерне будет обнаружено: а) менее 5 т бензина; б) более 20 т бензина; в) хотя бы 1 т бензина.
4. Цена деления шкалы амперметра равна  $0,1\text{ А}$ . Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая  $0,02\text{ А}$ .
5. Время ожидания ответа на телефонный звонок – случайная величина, подчиняющаяся равномерному закону в интервале от 0 до 60 секунд. Найти плотность распределения и функцию распределения этой случайной величины. Определить вероятность того, что время ожидания ответа не превысит 45 секунд.
6. Место дежурства передвижного поста №2 ДПС – случайная величина, подчиняющаяся равномерному закону распределения в интервале от 997 км до 1447 км. Найти плотность распределения и функцию распределения этой случайной величины. Определить вероятность того, что нарушение зафиксируют на интервале от 1200 км до 1300 км.

### **Задачи на расчет квантили случайной величины**



1. Как правило, среди 20 газонокосилок одна попадает не исправная. Случайным образом отобраны 2 газонокосилки. Построить пуассоновский и биномиальный законы распределения количества неисправных газонокосилок среди отобранных
2. Вероятность потерять кредитную карту в течение месяца для случайно выбранного вкладчика составляет 0,003. Банк выдал кредитные карты 1000 клиентам. Составить ряд распределения вероятностей того, что за предстоящий месяц будут утеряны  $m = 0, 1, 2, 3, 4$  кредитных карт.
3. Известно, что примерно на 10000 банок консервов приходится 5 нарушений герметичности. Построить ряд распределения вероятностей того, что в партии из 20000 банок нарушение герметичности произойдет не более чем в 5 случаях.
4. Вероятность сбоя банкомата при приеме коммунальных платежей равна 0,000025. Построить ряд распределения вероятностей того, что из 10000 обслуженных клиентов сбой произойдет в  $m = 0, 1, 2, 3, 4$  случаях.
5. Обрыв телефонной связи произошел на одном из пяти участков. Последовательно проверяются все участки. Составить закон распределения обследованных участков, если вероятность обрыва связи одинакова для всех звеньев.
6. Стрелок стреляет по мишени до первого попадания, производит не более четырех выстрелов. Построить закон распределения числа произведенных выстрелов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,9.
7. При игре в городки остался 1 городок, а у игрока осталось 5 бит. Найти закон распределения числа использованных бит, если вероятность выбить городок при каждом броске равна 0,8.
8. Вероятность того, что мастерская примет на ремонт сломавшийся у школьника сотовый телефон равна 0,4. Составить закон распределения количества мастерских, которые посетит школьник, если таких мастерских в городе 8.

**Практическая работа №12 «Центральная предельная теорема и ее применение».**

**Пример:**

Стрелок в десятку попадает с вероятностью 0,4, в девятку – с вероятностью 0,3, в восьмерку – с вероятностью 0,2, в семерку – с вероятностью 0,1. Какова вероятность того, что при 25 выстрелах стрелок наберет от 220 до 240 очков?

*Решение.* Пусть при  $i$ -м выстреле стрелок выбивает  $X_i$  очков. Величины  $X_i$  независимы и имеют одно и то же распределение

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | 7   | 8   | 9   | 10  |
| $P$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |

Заметим, что  $M(X_i) = 7 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,4 = 9$ , а  $D(X_i) = (7-9)^2 \cdot 0,1 + (8-9)^2 \cdot 0,2 + (9-9)^2 \cdot 0,3 + (10-9)^2 \cdot 0,4 = 1$ .

Сумма очков  $Y = \sum_{i=1}^{25} X_i$ , будучи суммой большого числа независимых одинаково распределенных слагаемых с ограниченными дисперсиями, имеет закон распределения близкий к нормальному с

$$M(Y) = M\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right) = \sum_{i=1}^{25} M(X_i) = 25 \cdot 9 = 225$$

параметрами

$$D(Y) = D\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right) = \sum_{i=1}^{25} D(X_i) = 25 \cdot 1 = 25.$$

В итоге  $Y \sim N(225; 25)$ . Поэтому по формуле (2.9.2)

$$\begin{aligned} P(220 < Y < 240) &= \Phi\left(\frac{240-225}{5}\right) - \Phi\left(\frac{220-225}{5}\right) = \\ &= \Phi(3) - \Phi(-1) = 0,4986 + 0,2420 = 0,7406 \approx 0,74. \end{aligned}$$

*Ответ.*  $0,7406 \approx 0,74$ .

**Пример:**

Регулировка прибора занимает время от 4 до 10 мин. Регулировщику предстоит отрегулировать 50 приборов. Считая для каждого прибора равновероятными все значения времени регулировки в указанных пределах, оценить вероятность того, что регулировщик справится с работой за шесть часов.

*Решение.* Пусть  $X_i$  – время регулировки  $i$ -го прибора, а

$Y = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{50}$  – время выполнения работы рабочим.

Требуется найти  $P(Y < 360)$ . Величина  $Y$  является суммой большого числа одинаково распределенных независимых случайных величин, каждая из которых ограничена. По центральной предельной теореме  $Y$  имеет закон распределения близкий к нормальному закону распределения. Найдем параметры этого закона, т.е. математическое ожидание и дисперсию величины  $Y$ . Так как случайные величины  $X_i$

$$M(Y) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_{50})$$

независимы, то и

$$D(Y) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_{50}).$$

Вычислим  $M(X_i)$  и  $D(X_i)$ . По условию все значения случайной величины  $X_i$  равновероятны в отрезке  $[4, 10]$ . Поэтому функция плотности вероятности этой случайной величины в указанном отрезке постоянна. Чтобы площадь, заключенная между графиком функции плотности вероятности и осью абсцисс, равнялась единице, следует положить  $f(x) = 1/6$  при  $x \in [4, 10]$  и  $f(x) = 0$  при остальных  $x$ . С учетом этого имеем

$$M(X_i) = \int_4^{10} x \cdot 1/6 dx = 7, \quad D(X_i) = \int_4^{10} (x-7)^2 \cdot 1/6 dx = 3.$$

Поэтому  $M(Y) = 50 \cdot 7 = 350$ ,  $D(Y) = 50 \cdot 3 = 150$ ,  $\sigma(Y) \approx 12,25$ .

Итак,  $Y \sim N(350; 150)$ . Для вычисления искомой вероятности воспользуемся формулой (2.9.2) и таблицей функции Лапласа (см. прил., табл. П2):

$$\begin{aligned} P(Y < 360) &= P(200 < Y < 360) = \Phi\left(\frac{360 - 350}{12,25}\right) - \Phi\left(\frac{200 - 350}{12,25}\right) = \\ &= \Phi(0,82) + \Phi(12,24) = 0,294 + 0,5 \approx 0,8. \end{aligned}$$

*Ответ.*  $0,794 \approx 0,8$ .

**Пример:**

Жетон для игрового автомата стоит 10 рублей. При использовании одного жетона (в отдельной игре) вероятность не получить ничего равна 0,8, вероятность получить 20 рублей равна 0,15, вероятность получения 50 рублей равна 0,04 и вероятность получения 100 рублей равна 0,01. Игрок купил жетонов на 1000 рублей. Какова вероятность того, что игрок не окажется в проигрыше?

*Решение.* Игрок купил  $1000 : 10 = 100$  жетонов. Результат каждой игры (использование одного жетона) является случайной величиной  $X_i$  с законом распределения

|       |     |      |      |      |
|-------|-----|------|------|------|
| $X_i$ | -10 | 10   | 40   | 90   |
| $P$   | 0,8 | 0,15 | 0,04 | 0,01 |

Выигрыш указан с учетом стоимости жетона.

Результат 100 игр обозначим через  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$ . Величина  $Y$  является суммой большого числа одинаково распределенных независимых случайных величин, каждая из которых ограничена. По центральной предельной теореме  $Y$  имеет закон распределения близкий к нормальному закону распределения. Найдем параметры этого закона, т.е. математическое ожидание и дисперсию величины  $Y$ . Так как случайные величины  $X_i$  независимы, то

$$M(Y) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_{100}) \text{ и } D(Y) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_{100}).$$

Так как

$$M(X_i) = -10 \cdot 0,8 + 10 \cdot 0,15 + 40 \cdot 0,04 + 90 \cdot 0,01 = -2,$$

$$\text{а } D(X_i) = (-10 + 2)^2 \cdot 0,8 + (10 + 2)^2 \cdot 0,15 + (40 + 2)^2 \cdot 0,04 + (90 + 2)^2 \cdot 0,01 = 228,$$

$$\text{то } M(Y) = -2 \cdot 100 = -200, \quad D(Y) = \sigma^2(Y) = 228 \cdot 100 = 22800, \quad \sigma(Y) \approx 151.$$

Итак,  $Y$  имеет примерно нормальный закон распределения  $N(-200; 22800)$ . Игрок не окажется в проигрыше, если  $Y \geq 0$ . По формуле (2.9.2) имеем

$$\begin{aligned} P(Y \geq 0) &= P(0 \leq Y \leq 9000) = \Phi\left(\frac{9000 - (-200)}{151}\right) - \Phi\left(\frac{0 - (-200)}{151}\right) = \\ &= \Phi(61) - \Phi(1,32) = 0,5 - 0,4066 \approx 0,09. \end{aligned}$$

*Ответ.*  $\approx 0,09$ .



**Пример:**

Вероятность рождения мальчика равна 0,514. Определить вероятность того, что доля мальчиков среди 400 новорожденных будет отличаться от вероятности рождения мальчика не более чем на 0,05 в ту или другую сторону.

*Решение.* Рождение ребенка можно рассматривать как независимый опыт с вероятностью «успеха»  $p = 0,514$  (по данным статистики на каждую тысячу новорожденных приходится 514 мальчиков). Тогда по формуле (2.13.1)

$$P(|k/n - 0,514| < 0,05) = 2\Phi\left(\frac{0,05}{\sqrt{0,514 \cdot 0,486 / 400}}\right) = 2\Phi(2,0004) = 0,9545.$$

*Ответ.* 0,9545.

**Пример:**

Вероятность события  $P(A) = p = 0,9$ . Сколько независимых опытов нужно проделать, чтобы с вероятностью 0,95 быть уверенным, что частота появления события в этих опытах будет отличаться от вероятности события не более чем на 0,05 в ту или другую сторону?

*Решение.* Запишем формулу (2.13.1) для нашего случая:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - 0,9\right| < 0,05\right) = 2\Phi\left(\frac{0,05}{\sqrt{0,9 \cdot 0,1 / n}}\right) = 0,95.$$

По таблице функции Лапласа находим, что  $2\Phi(1,96) = 0,95$ . Поэтому  $0,05 \cdot 0,05 \cdot \sqrt{n} / 0,3 = 1,96$ . Откуда  $n \approx 138,3$ . Условия задачи выполняются при  $n \geq 139$ .

*Ответ.*  $n \geq 139$ .

**Практическая работа №13** «Решение задач на вычисление характеристик случайных величин».

- 1. Задача с решением.** Дано распределение дискретной случайной величины  $X$ . Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

|       |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$ | -2  | 1   | 3   | 5   |
| $p_i$ | 0,1 | 0,3 | 0,4 | 0,2 |

**Решение.** Математическое ожидание определяется по формуле

$$M(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Таким образом, получаем  $M(X) = -2 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,2 = 2,3$ .

Чтобы найти среднее квадратичное отклонение, определим дисперсию. Для определения дисперсии воспользуемся формулой:  $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ .

Составим закон распределения случайной величины  $X^2$ :

|       |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| $X^2$ | 4   | 1   | 9   | 25  |
| $p$   | 0,1 | 0,3 | 0,4 | 0,2 |

Найдем математическое ожидание  $M(X^2)$ :

$$M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,4 + 25 \cdot 0,2 = 9,3.$$

Тогда дисперсия:  $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 9,3 - 2,3^2 = 9,3 - 5,29 = 4,01$ .

Определим среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{4,01} \approx 2,0025.$$

- 2. Задача с решением.** Вероятность появления события в одном испытании постоянна и равна  $p = 0,1$ . Написать закон распределения случайной величины  $X$  — числа появления события в  $n = 3$  испытаниях. Построить многоугольник распределения. Вычислить математическое ожидание  $M(X)$ , Дисперсию  $D(X)$  и среднее квадратическое отклонение  $\sigma(X)$  случайной величины.

**Решение.** Дискретная случайная величина  $X$  (число появлений события) имеет следующие возможные значения:  $x_1 = 0$  (ни одного появления),  $x_2 = 1$  (одно появление события),  $x_3 = 2$  (два появления),  $x_4 = 3$  (все три появления некоторого события).

Появление события в каждом испытании независимо одно от другого, вероятности этих появлений равны между собой, поэтому применима формула Бернулли  $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ . Строим биномиальное распределение. Учитывая, что, по

условию,  $n = 3$ ,  $p = 0,1$ , тогда  $q = 1 - 0,1 = 0,9$ , получим:

$$P(X = 0) = P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = q^3 = 0,9^3 = 0,729;$$

$$P(X = 1) = P_3(1) = C_3^1 p^1 q^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^2 = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,81 = 0,243;$$

$$P(X = 2) = P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^1 = 3 \cdot 0,01 \cdot 0,9 = 0,027;$$

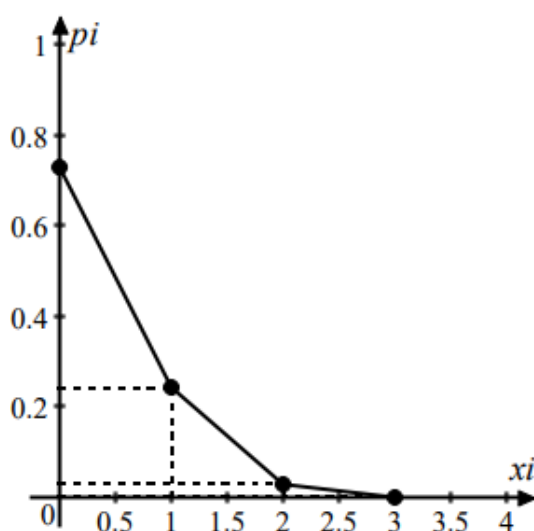
$$P(X = 3) = P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 0,1^3 = 0,001.$$

Напишем искомый биномиальный закон распределения  $X$ :

|     |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| $X$ | 0     | 1     | 2     | 3     |
| $p$ | 0,729 | 0,243 | 0,027 | 0,001 |

**Контроль:**  $0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1$ .

Построим многоугольник распределения:



По полученному закону распределения определим математическое ожидание.

**Способ I.**

$$M(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k = 0 \cdot 0,729 + 1 \cdot 0,243 + 2 \cdot 0,027 + 3 \cdot 0,001 = 0,3.$$

**Способ II.** Для биномиального распределения математическое ожидание можно найти по формуле:

$$M(X) = np = 3 \cdot 0,1 = 0,3$$

Определим дисперсию:

**Способ II.** Для биномиального распределения дисперсию можно определить по формуле:  $D(X) = npq = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,27$ .

Определим среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,27} \approx 0,5196.$$

### 3. Случайная величина $X$ задана рядом распределения

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | -1  | 0,7 | 1,5 | 4   |
| $P$ | 0,2 | 0,4 | 0,1 | ... |

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $Z^2 = 2X^2 - 1,5X$ . Постройте многоугольник распределения.

- 4. Задача с решением.** Две независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  заданы своими рядами распределений:

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| $x_i$ | 2   | 4   |
| $p_i$ | 0,7 | 0,3 |

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $y_i$ | -1  | 0   | 15  |
| $p_i$ | 0,4 | 0,1 | 0,5 |

Составить закон распределения их суммы – случайной величины  $Z = X + Y$  и проверить выполнение свойства математического ожидания:  
 $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$ .

**Решение.** Составим закон распределения  $Z = X + Y$ . Найдем возможные значения  $Z_{ij} = X_i + Y_j$ :

$$z_{11} = x_1 + y_1 = 2 + (-1) = 1;$$

$$z_{12} = x_1 + y_2 = 2 + 0 = 2;$$

$$z_{13} = x_1 + y_3 = 2 + 15 = 17;$$

$$z_{21} = x_2 + y_1 = 4 + (-1) = 3;$$

$$z_{22} = x_2 + y_2 = 4 + 0 = 4;$$

$$z_{23} = x_2 + y_3 = 4 + 15 = 19.$$

Находим вероятности этих значений:

$$p_1 = P(Z = 1) = P(X = 2, Y = -1) = P(X = 2) \cdot P(Y = -1) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28;$$

$$p_2 = P(Z = 2) = P(X = 2, Y = 0) = P(X = 2) \cdot P(Y = 0) = 0,7 \cdot 0,1 = 0,07;$$

$$p_3 = P(Z = 17) = P(X = 2, Y = 15) = P(X = 2) \cdot P(Y = 15) = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35;$$

$$p_4 = P(Z = 3) = P(X = 4, Y = -1) = P(X = 4) \cdot P(Y = -1) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12;$$

$$p_5 = P(Z = 4) = P(X = 4, Y = 0) = P(X = 4) \cdot P(Y = 0) = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03;$$

$$p_6 = P(Z = 19) = P(X = 4, Y = 15) = P(X = 4) \cdot P(Y = 15) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15.$$

В итоге получаем закон распределения  $Z = X + Y$ :

|       |      |      |      |      |      |      |
|-------|------|------|------|------|------|------|
| $z_i$ | 1    | 2    | 3    | 4    | 17   | 19   |
| $p_i$ | 0,28 | 0,07 | 0,12 | 0,03 | 0,35 | 0,15 |

Контроль:  $\sum_{i=1}^6 p_i = 0,28 + 0,07 + 0,12 + 0,03 + 0,35 + 0,15 = 1$ .

Вычислим математические ожидания для каждого из законов распределения.

По закону распределения случайной величины  $X$

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| $x_i$ | 2   | 4   |
| $p_i$ | 0,7 | 0,3 |

вычислим  $M(X) = 2 \cdot 0,7 + 4 \cdot 0,3 = 2,6$ .

По закону распределения случайной величины  $Y$

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $y_i$ | -1  | 0   | 15  |
| $p_i$ | 0,4 | 0,1 | 0,5 |

вычислим  $M(Y) = -1 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,1 + 15 \cdot 0,5 = 7,1$ .

Аналогично по закону распределения случайной величины  $Z = X + Y$



|       |      |      |      |      |      |      |
|-------|------|------|------|------|------|------|
| $z_i$ | 1    | 2    | 3    | 4    | 17   | 19   |
| $p_i$ | 0,28 | 0,07 | 0,12 | 0,03 | 0,35 | 0,15 |

ВЫЧИСЛИМ

$$M(Z) = M(X + Y) = 1 \cdot 0,28 + 2 \cdot 0,07 + 3 \cdot 0,12 + 4 \cdot 0,03 + 17 \cdot 0,35 + 19 \cdot 0,15 = 9,7.$$

Очевидно, что  $M(X) + M(Y) = 2,6 + 7,1 = 9,7 = M(Z)$ .

5. Две независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  заданы своими рядами распределений:

|     |     |       |     |
|-----|-----|-------|-----|
| $X$ | -1  | 0     | 1   |
| $P$ | 0,5 | $p_1$ | 0,1 |

|     |     |     |       |
|-----|-----|-----|-------|
| $Y$ | -2  | -1  | 0     |
| $P$ | 0,1 | 0,1 | $p_2$ |

Написать закон распределения случайной величины  $Z = X + 2Y$ , вычислить  $M(Z)$ ,  $D(Z)$ ,  $M(3 + 4X)$ ,  $D(Y - X + 3)$ ,  $M(X^2)$ .

6. Случайная величина  $X$  задана таблицей:

|     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | -3  | -2  | 0   | 3   | 4   |
| $P$ | $p$ | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,5 |

Вычислить:  $p$ ,  $M(X)$ ,  $D(X)$ ,  $P(-3 < X \leq 2)$ . Построить график  $F(x)$ .

7. Известен закон распределения дискретной случайной величины  $X$ :

|     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | -5  | -4  | -2  | 0   | 1   |
| $P$ | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,2 |

Определить математическое ожидание  $M(X)$ , дисперсию  $D(X)$ , вероятность попадания  $X$  в интервал  $(-3, 0)$ :  $P(-3 < X \leq 0)$ . Построить график интегральной функции распределения  $F(x)$ .

8. Составьте ряд распределения случайной величины  $X$  – числа попаданий при 5 выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,4.
9. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрываются 1 выигрыш в 500 р. и 10 выигрышей по 10 р. Найдите закон распределения случайного выигрыша  $X$  для владельца одного лотерейного билета и найдите математическое ожидание выигрыша  $X$ . Постройте функцию распределения.
10. *Задача с решением.* Предприниматель может получить кредиты в трех независимо работающих друг от друга банках. В первом банке он может получить 35 млн. руб. с вероятностью  $\frac{1}{4}$ , во втором банке – 15 млн. руб. с вероятностью  $\frac{1}{2}$ , в третьем банке – 25 млн. руб. с вероятностью  $\frac{1}{3}$ . Необходимо: а) найти закон распределения случайной величины  $X$  – возможной суммы кредитов и построить многоугольник распределения; б) найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины  $X$ ; в) найти функцию распределения дискретной случайной величины  $X$ , построить ее график и найти вероятность того, что предприниматель получит кредит в размере от 35 до 50 млн. руб.

**Решение.** а) Пусть событие  $A_i$  – получение кредита в  $i$ -ом банке,  $i = 1, 2, 3$ . Тогда по условию  $P(A_1) = \frac{1}{4}$ ,  $P(A_2) = \frac{1}{2}$ ,  $P(A_3) = \frac{1}{3}$ .

Поскольку банки работают независимо друг от друга (события  $A_1, A_2, A_3$  – независимы), то предприниматель может получить кредиты как в одном банке, так и в нескольких одновременно, следовательно, возможные суммы кредитов ( $x_i$  млн. руб.): 0; 15; 25; 35; 40; 50; 60; 75. Найдем вероятности  $p_i$  получения этих сумм,  $i = \overline{0, 7}$ .

$$\begin{aligned} p_0 &= P(X=0) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4}; \\ p_1 &= P(X=15) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4}; \\ p_2 &= P(X=25) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8}; \\ p_3 &= P(X=35) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{12}; \\ p_4 &= P(X=40) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8}; \\ p_5 &= P(X=50) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{12}; \\ p_6 &= P(X=60) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24}; \\ p_7 &= P(X=75) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Тогда закон распределения случайной величины  $X$  – возможной суммы кредитов – имеет вид:

|       |               |               |               |                |               |                |                |                |
|-------|---------------|---------------|---------------|----------------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| $x_i$ | 0             | 15            | 25            | 35             | 40            | 50             | 60             | 75             |
| $p_i$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ |

где  $x_i$  – возможные значения случайной величины  $X$ ,  $p_i$  – соответствующие этим значениям вероятности.

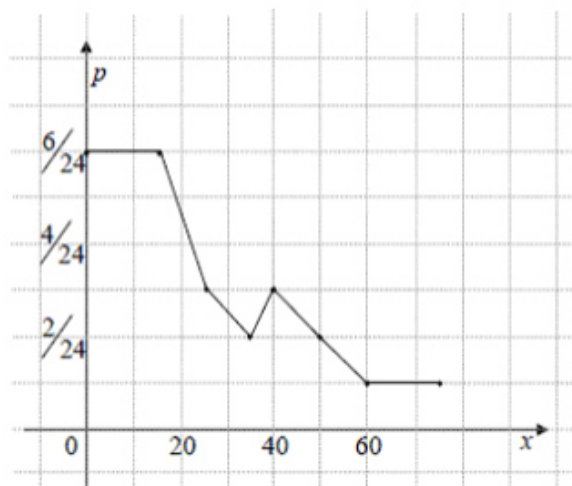
Проверим условие нормировки:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^7 p_i &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \\ &+ \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = 1. \end{aligned}$$

Многоугольник распределения – ломаная линия, соединяющая точки с координатами  $(x_i; p_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$ .

**б)** Математическое ожидание дискретной случайной величины:

$$M(X) = \sum_{i=0}^7 x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{4} + 15 \cdot \frac{1}{4} + 25 \cdot \frac{1}{8} + 35 \cdot \frac{1}{12} + 40 \cdot \frac{1}{8} + 50 \cdot \frac{1}{12} +$$



$$+ 60 \cdot \frac{1}{24} + 75 \cdot \frac{1}{24} = 24 \frac{7}{12} \approx 24,58.$$

Дисперсия:

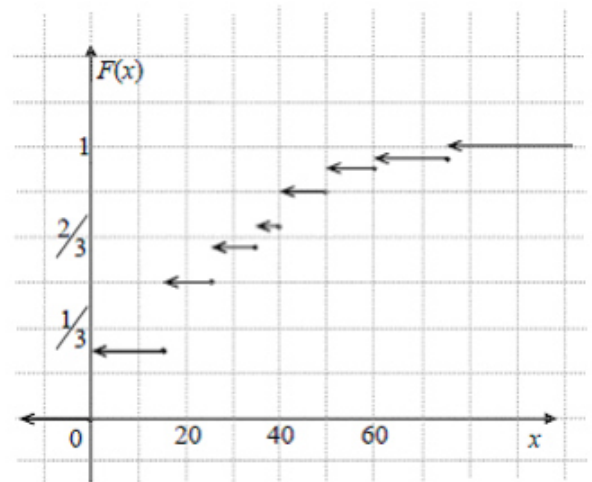
$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 15^2 \cdot \frac{1}{4} + 25^2 \cdot \frac{1}{8} + 35^2 \cdot \frac{1}{12} + 40^2 \cdot \frac{1}{8} + 50^2 \cdot \frac{1}{12} + 60^2 \cdot \frac{1}{24} + 75^2 \cdot \frac{1}{24} - \left(24 \frac{7}{12}\right)^2 \approx 424,83.$$

Среднее квадратичное отклонение:  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{424,83} \approx 20,61$ .

Ответ:  $M(X) = 24,58$  млн.руб.,  $D(X) = 424,83$ ,  $\sigma(X) = 20,61$  млн. руб.

**в)** Функция распределения дискретной случайной величины определяется формулой  $F(X) = P(X < x)$ . На основе закона распределения случайной величины  $X$  – возможной суммы кредитов, получаем функцию распределения, график которой изображен на рисунке.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1/4, & 0 < x \leq 15, \\ 1/2, & 15 < x \leq 25, \\ 5/8, & 25 < x \leq 35, \\ 17/24, & 35 < x \leq 40, \\ 20/24, & 40 < x \leq 50, \\ 22/24, & 50 < x \leq 60, \\ 23/24, & 60 < x \leq 75, \\ 1, & x > 75. \end{cases}$$



Вероятность того, что предприниматель получит кредит в размере от 35 до 50 мл. руб. найдем с помощью функции распределения:

$$P(35 \leq X \leq 50) = P(35 \leq X < 60) = F(60) - F(35) = \frac{22}{24} - \frac{5}{8} = \frac{7}{24}.$$

Ответ: вероятность того, что предприниматель получит кредит в размере от 35 до 50 мл. руб. составляет  $\frac{7}{24}$ .

**Практическая часть лекции «Составление вариационных рядов»**

## Задача 1

**Исходные данные:** студенты некоторой группы, состоящей из 30 человек сдали экзамен по курсу «Информатика». Полученные студентами оценки образуют следующий ряд чисел:

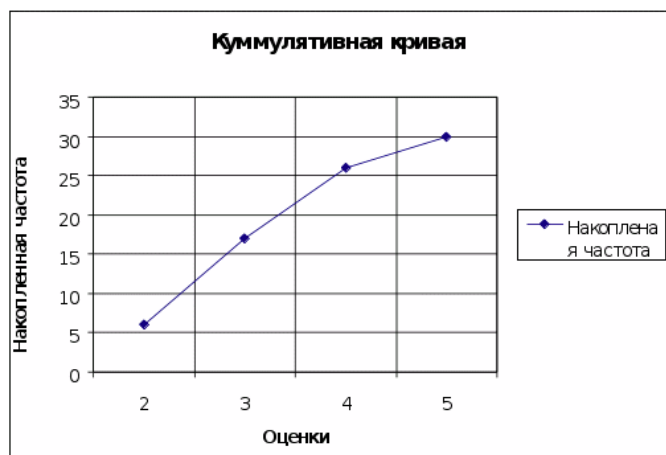
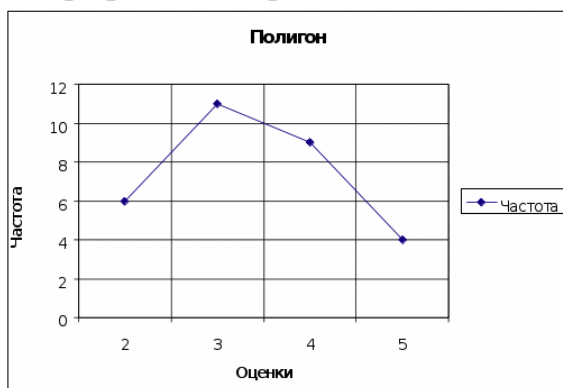
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 5 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 4 | 2 | 5 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 2 | 5 | 5 | 2 | 3 | 3 |

Решение:

I. Составим вариационный ряд

| $x$           | $m_x$ | $w_x$ | $m_x^{\text{нак}}$ | $w_x^{\text{нак}}$ |
|---------------|-------|-------|--------------------|--------------------|
| 2             | 6     | 0,2   | 6                  | 0,2                |
| 3             | 11    | 0,37  | 17                 | 0,57               |
| 4             | 9     | 0,3   | 26                 | 0,87               |
| 5             | 4     | 0,13  | 30                 | 1                  |
| <b>Итого:</b> | 30    | 1     | —                  | —                  |

II. Графическое представление статистических сведений



1. Среднее арифметическое

$$x_{cp} = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n x_i = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 4}{30} = 3,36 \approx 3$$

2. Среднее геометрическое

$$x_{geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[30]{2^6 \cdot 3^{11} \cdot 4^9 \cdot 5^4} = 3,23 \approx 3$$

3. Мода  $Mo = 3$

4. Медиана

$$2222223333333333 \mid 3344444444445555$$

$$Me = \frac{3+3}{2} = 3$$

5. Выборочная дисперсия

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n (x_i - x_{cp})^2 = \frac{6 \cdot (2-3)^2 + 11 \cdot (3-3)^2 + 9 \cdot (4-3)^2 + 4 \cdot (5-3)^2}{30} \approx 1,03$$

6. Выборочное стандартное отклонение

$$S_e = \sqrt{S_n^2} = \sqrt{1,03} \approx 1,017$$

7. Коэффициент вариации

$$v = \frac{S_e}{x_{cp}} = \frac{1,017}{3} \approx 0,34$$

8. Ассиметрия

$$As = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n (x_i - x_{cp})^3 = \frac{6 \cdot (2-3)^3 + 11 \cdot (3-3)^3 + 9 \cdot (4-3)^3 + 4 \cdot (5-3)^3}{30} \approx 1,17$$

9. Коэффициент асимметрии

$$y_{As} = \frac{As}{S_e^3} = \frac{1,17}{1,017^3} \approx 1,11$$

10. Эксцесс

$$Ex = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n (x_i - x_{cp})^4 = \frac{6 \cdot (2-3)^4 + 11 \cdot (3-3)^4 + 9 \cdot (4-3)^4 + 4 \cdot (5-3)^4}{30} \approx 2,63$$

11. Коэффициент эксцесса

$$Ex = \frac{Ex}{S_e^4} - 3 = \frac{2,63}{1,017^4} - 3 \approx -0,53$$



### Задача 2

**Исходные данные:** студенты некоторой группы написали выпускную контрольную работу. Группа состоит из 30 человек. Набранные студентами баллы образуют следующий ряд чисел

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 18 | 10 | 17 | 13 | 15 | 15 | 14 | 17 | 20 | 19 |
| 15 | 15 | 14 | 13 | 16 | 16 | 12 | 11 | 13 | 14 |
| 19 | 20 | 15 | 16 | 15 | 16 | 14 | 16 | 13 | 12 |

### Задача 3

**Условие:** цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

### Задача 4

**Исходные данные:** математическое ожидание и стандартное отклонение нормально распределенного признака  $X$  соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания  $X$  примет значение, заключенное в интервале (12, 14).

### Задача 5

**Исходные данные:** найти доверительный интервал для оценки с надежностью  $\gamma = 0,95$  неизвестного математического ожидания  $\mu$  нормально распределенного признака  $X$  генеральной совокупности, если генеральное стандартное отклонение  $\sigma = 5$ , выборочная средняя  $\bar{x} = 14$ , объем выборки  $n = 25$ .

Практическая работа №17 «Графическое изображение вариационных рядов»

**Задание.** Дан следующий вариационный ряд

|       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| $i$   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $x_i$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5  |

Требуется

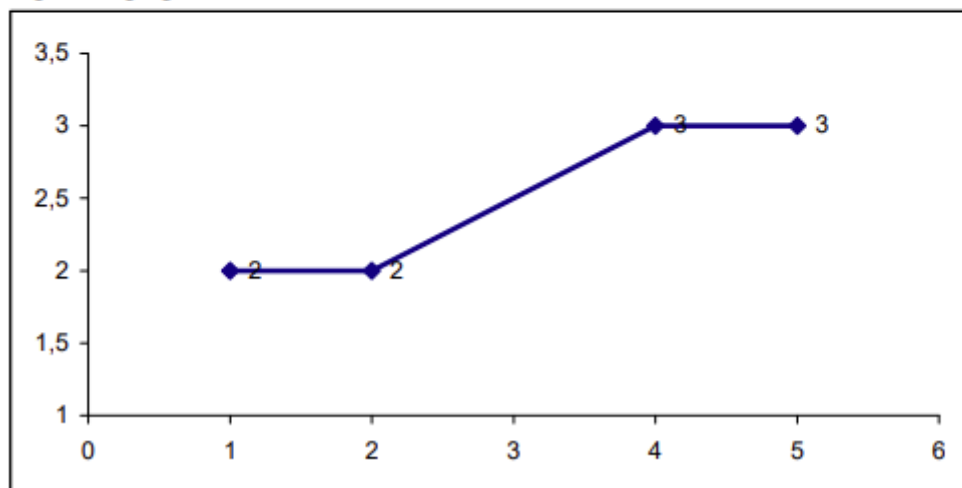
- 1) Построить полигон распределения
- 2) Вычислить выборочную среднюю, дисперсию, моду, медиану.
- 3) Построить выборочную функцию распределения
- 4) Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

РЕШЕНИЕ. В задании дана выборка объема  $n = 10$ .

1) Полигон распределения – это зависимость абсолютной частоты варианта  $m_i$  от значения варианта  $x_i$ . Эту зависимость можно представить в виде таблицы:

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 4 | 5 |
| $m_i$ | 2 | 2 | 3 | 3 |

Строим график полигона частот:



2) Вычислим выборочную среднюю, дисперсию, моду, медиану.

Выборочная средняя:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i m_i = \frac{1}{10} (1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3) = \frac{33}{10} = 3,3.$$

Выборочная дисперсия

$$D_x = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 m_i - 3,3^2 = \frac{1}{10} (1 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 25 \cdot 3) - 3,3^2 = 2,41.$$

Выборочное среднееквадратичное отклонение:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{2,41} \approx 1,552.$$

Мода равна варианту, имеющему наибольшую частоту:  $x_{Mo} = 4; 5$  (две моды)

Медиана равна среднему варианту выборки:  $x_{Me} = 4$ .

3) Выборочная функция распределения аналогична функции распределения дискретной случайной величины. Для ее нахождения запишем ряд распределения выборки, где

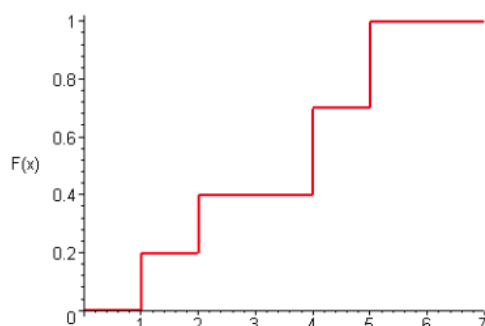
$$p_i = \frac{m_i}{n} = \frac{m_i}{10} - \text{относительная частота варианта } x_i.$$

|       |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$ | 1   | 2   | 4   | 5   |
| $p_i$ | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,3 |

Построим график:

Тогда

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 0,2, & 1 < x \leq 2, \\ 0,4, & 2 < x \leq 4, \\ 0,7, & 4 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$



4) Несмещенная оценка математического ожидания совпадает с выборочной средней:  
 $M(X) = \bar{x} = 3,3$ .

Несмещенная оценка дисперсии отличается от выборочной дисперсии в большую сторону:  $D(X) = \frac{n}{n-1} D_x = \frac{10}{9} 2,41 \approx 2,678$ .

2. В таблице 2 дан дискретный ряд. В ней приведены данные о распределении 50-ти рабочих цеха по тарифному разряду.

|                                       |   |   |   |   |    |   |
|---------------------------------------|---|---|---|---|----|---|
| Тарифный разряд $x_i$<br>(варианты)   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6 |
| Частота (количество<br>рабочих) $p_i$ | 2 | 3 | 6 | 8 | 22 | 9 |

Построить полигон (гистограмму), кумулянту и эмпирическую функцию распределения рабочих

Задание 3.

Выборочная проверка партии чая, поступившего в торговую сеть, дала следующие результаты:

|                         |       |       |       |       |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Вес, грамм, $x$         | 47-49 | 49-50 | 50-51 | 51-53 |
| Количество пачек, $n_i$ | 20    | 50    | 20    | 10    |

Требуется построить гистограмму и полигон относительных частот, эмпирическую функцию распределения

Практическая работа №14 «Составление эмпирической функции распределения».



### Определение 1

Для существующей выборки  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и ряда частот, каждая из которых соответствует каждому элементу выборки, существует такая функция  $F^*(x)$ , которая и определяет конкретное значение частоты события для любого из компонентов выборки.

Используемая формула, для вычисления эмпирической функции распределения

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \sum_{x_i < x} p_i$$

Здесь  $n_x$  — количество наблюдений (вариантов) меньше  $x$ ,  $n$  - размер выборки,  $x$  – произвольное значение величин.

Либо более общая, но абсолютно идентичная запись:

$$F_n^*(t) = \frac{|i: x_i \leq t|}{n}$$

### Свойство 1

Одно из свойств функции  $F^*(x)$  заключается в том, что все её значения лежат в пределах интервала  $[0;1]$ .

### Свойство 2

$F^*(x)$ - неубывающая функция.

Не трудно уловить закономерность, заключающуюся в том, что функция  $F_n^*(t)$  представляет собой кусочно-постоянную, а также неубывающую и непрерывную справа функцию. В том случае, если  $x_i$  различные, тогда для каждой точке  $x_i$  функция получает скачок величины своего значения. В случае, когда  $\frac{1}{n}$  из  $x_i$  совпадают, скачки будут складываться.

### Свойство 3

Если  $x_1$  – наименьшая варианта, то  $F^*(x) = 0$  при  $x \leq x_1$ .

### Свойство 4

Если  $x_k$  – наибольшая варианта, то  $F^*(x) = 1$  при  $x > x_k$ .

Дана таблица функции распределения выборки. Требуется построить эмпирическую функцию распределения

|       |   |    |   |   |   |   |
|-------|---|----|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2  | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $n_i$ | 4 | 10 | 6 | 8 | 7 | 5 |

### Решение

Из таблицы  $n=40$ , т.е.

$$n=4+10+6+8+7+5=40$$

Вычислим функцию распределения выборки

$$F_{40}(x \leq 1) = \frac{0}{40} = 0$$

$$F_{40}(1 < x \leq 2) = \frac{0+4}{40} = 0,1$$

$$F_{40}(2 < x \leq 3) = \frac{4+10}{40} = 0,35$$

$$F_{40}(3 < x \leq 4) = \frac{4+10+6}{40} = 0,5$$

$$F_{40}(4 < x \leq 5) = \frac{4+10+6+8}{40} = 0,7$$

$$F_{40}(5 < x \leq 6) = \frac{4+10+6+8+7}{40} = 0,875$$

$$F_{40}(x > 6) = \frac{4+10+6+8+7+5}{40} = 1$$

### Задача 2

Дано распределение выборки

|             |   |    |    |
|-------------|---|----|----|
| X вариантов | 1 | 5  | 9  |
| n частот    | 6 | 12 | 22 |

Постройте эмпирическую функцию.

Практическая работа №15 «Вычисление числовых характеристик статистического распределения».

Практическая часть лекции «Расчет средних величин. Расчет показателей вариации»

- При расчете средней по интервальному вариационному ряду от интервалов переходят к их серединам.
- Пример. *Распределение менеджеров предприятия по возрасту:*

|                        |       |       |       |       |       |            |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|------------|
| Возраст (лет)          | до 25 | 25-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60 и более |
| Число менеджеров (чел) | 7     | 13    | 38    | 42    | 16    | 5          |

- Найдем середины возрастных интервалов:

|                          |      |      |      |      |      |      |
|--------------------------|------|------|------|------|------|------|
| Середина интервала (лет) | 22,5 | 27,5 | 35,0 | 45,0 | 55,0 | 65,0 |
| Число менеджеров (чел)   | 7    | 13   | 38   | 42   | 16   | 5    |

- Средний возраст менеджера равен:

$$\bar{x} = \frac{22,5 \cdot 7 + 27,5 \cdot 13 + 35 \cdot 38 + 45 \cdot 42 + 55 \cdot 16 + 65 \cdot 5}{7 + 13 + 38 + 42 + 16 + 5} = 41(\text{год}).$$

Рассмотрим расчет средних на конкретных примерах.

1.1. Измерив рост всех студентов в группе, получили следующие данные: 1,64 м, 1,86 м, 1,72 м, 1,95 м, 1,76 м, 1,65 м, 1,79 м, 1,82 м, 1,92 м. Найти средний рост студентов в группе.

Решение. Для определения среднего роста студентов в группе необходимо суммарный рост всех студентов в группе разделить на количество студентов. Всего в группе 9 студентов, обозначим рост каждого студента  $x_i$ , где  $i$  принимает значения от 1-го до 9-ти. Тогда, средний рост определяется по формуле средней арифметической простой:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\sum_{i=1}^9 x_i}{9} = \frac{1,64 + 1,86 + 1,72 + 1,95 + 1,76 + 1,65 + 1,79 + 1,82 + 1,92}{9} \\ &= \frac{16,11}{9} = 1,79 \text{ м}\end{aligned}$$

1.2. На экзамене по предмету «математика» студентами были получены следующие баллы: 46, 49, 55, 63, 74, 76, 84, 87, 92, 94. Найти средний балл за экзамен по математике группы студентов.

1.3. В течение учебного года первые четыре месяца студент не получал стипендию, следующие шесть месяцев размер стипендии составил 2,5 тыс. руб., в оставшиеся два месяца – 3,3 тыс. руб. Найти среднюю стипендию студента в рассматриваемом году.

Решение. Запишем данные о размере стипендии студента в виде таблицы:

| Размер стипендии в месяц,<br>тыс. руб.<br>( $x_i$ – значения осредняемого признака) | Число месяцев, в течение которых стипендия<br>составляла данную сумму<br>( $f_i$ – частота, показывающая сколько раз в<br>рассматриваемом периоде (год) встречается<br>$i$ -е значение осредняемого признака) |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0                                                                                   | 4                                                                                                                                                                                                             |
| 2,5                                                                                 | 6                                                                                                                                                                                                             |
| 3,3                                                                                 | 2                                                                                                                                                                                                             |

Тогда, средний за год размер стипендии студента определяется по формуле средней арифметической взвешенной и составляет:

$$\bar{X} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{0 \cdot 4 + 2,5 \cdot 6 + 3,3 \cdot 2}{4 + 6 + 2} = \frac{21,6}{12} = 1,8 \text{ тыс. руб.}$$

## Контрольная работа 1

### Вариант 1

1. В ящике 10 перенумерованных шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 10?

2. В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров не меньше 7?

3. В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар белый или черный.

4. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель

для первого стрелка равна 0.75, для второго – 0.8, для третьего – 0.9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

5. В сборочный цех завода поступает 40% деталей из 1 цеха и 60% - их 2 цеха. В 1 цехе производится 90% стандартных деталей, а во 2 – 95%. Наудачу взятая сборщиком деталь

оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена 2 цехом.

### Вариант 2

1. В урне 5 белых и 10 черных шаров. Какова вероятность вынуть синий шар?

2. В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров равна 11?

3. В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар синий или красный.
4. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров, во втором – 8 белых и 4 черных. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые?
5. Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 20 белых шаров, во втором – 10 белых и 10 черных, в третьем – 20 черных. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Вычислить вероятность того, что шар вынут из первого ящика.

### Вариант 3

1. В урне 20 шаров с номерами от 1 до 20. Какова вероятность вынуть шар с номером 37
2. В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров не больше 11
3. В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар черный или красный.
4. Вероятность того, что в течение дня произойдет неполадка станка, равна 0.03. Какова вероятность того, что в течение четырех дней подряд не произойдет ни одной неполадки
- 11
5. В первой урне 5 белых и 10 черных шаров, во второй – 3 белых и 7 черных. Из второй урны в первую переложили один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Определить вероятность того, что вынутый шар – белый.

## Контрольная работа № 2

1. Дискретная случайная величина  $X$  задана законом распределения:

|       |      |     |     |     |     |
|-------|------|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$ | -2   | -1  | 3   | 8   | 9   |
| $p_i$ | $4p$ | 0,2 | 0,3 | $p$ | 0,4 |

Найти: а)  $p$ ; б) математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины; в) интегральную функцию распределения  $F(x)$  и начертить ее график; г)  $P(-5 < x < 2)$

2. В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не более 3 человек?
3. Дано распределение выборки Постройте эмпирическую функцию.

|     |   |   |   |    |    |
|-----|---|---|---|----|----|
| $x$ | 1 | 3 | 4 | 5  | 7  |
| $n$ | 2 | 4 | 7 | 10 | 12 |

4. Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины  $X$ , определяемой как количество студентов в наугад выбранной группе, используя следующие данные:

|   |     |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| X | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  |
| P | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,2 |

5. Класс, в котором учится 14 девочек и 14 мальчиков, случайным образом делят на две равные группы для занятий на компьютерах. Какова вероятность того, что мальчиков и девочек в них окажется поровну?

### Итоговая контрольная работа по теории вероятности

1. Пусть проводят  $n=6$  независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события  $A$  постоянна и равна  $p=0,1$ . Найдите вероятность того, что в данной серии испытаний  $A$  появиться  $m=3$  раза?
2. Стрелок делает 6 выстрелов по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле  $2/3$ . Найдите вероятность, того что он попал 4 раза.
3. В результате обследования были выделены семьи. Имеющие по 4 ребенка. Считая вероятность появления мальчика и девочки в семье равными, определите вероятность появления в ней двух мальчиков.
4. Статистика аудиторских проверок компании утверждает, то вероятность обнаружения ошибки в каждом проверяемом документе равна 0,1. Какова вероятность, то из десяти проверяемых документов девять из них не будет содержать ошибки?
5. Вероятность попадания стрелком мишени равна, 0,5. Найдите вероятность того, что при 8 выстрелах мишень будет поражена от 5-до 7 раз?

### Тематика устного опроса

1. Основные понятия теории вероятностей. Случайное событие. Вероятность. Статистическая вероятность.
2. Геометрическая вероятность.
3. Основные формулы комбинаторики.
4. Аксиоматика теории вероятностей. Аксиомы теории вероятностей.
5. Теоремы сложения вероятностей.
6. Условная вероятность события. Теоремы умножения вероятностей. Независимые события.
7. Повторение испытаний. Схема Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.
8. Формула полной вероятности. Теорема гипотез (формула Байеса).
9. Формула Пуассона.

10. Случайные величины. Закон распределения. Ряд распределения дискретной случайной величины. Смешанная случайная величина.
11. Функция распределения случайной величины и ее свойства.
12. Непрерывная случайная величина. Плотность вероятностей и ее свойства.
13. Математическое ожидание. Свойства математического ожидания.
14. Дисперсия. Свойства дисперсии.
15. Среднее квадратическое отклонение. Моменты. Асимметрия. Эксцесс.
16. Биномиальный закон распределения.
17. Закон распределения Пуассона.
18. Геометрический закон распределения. Гипергеометрическое распределение.
19. Равномерный закон распределения.
20. Показательный закон распределения.
21. Нормальный закон распределения.
22. Распределения случайных величин, представляющих функции нормальных величин.
23. Системы случайных величин. Функция распределения.
24. Плотность распределения двумерной случайной величины.
25. Условные законы распределения.
26. Числовые характеристики системы двух случайных величин.
27. Ковариация, коэффициент корреляции. Регрессия.
28. Числовые характеристики функций случайных величин. Математическое ожидание и дисперсия.
29. Теоремы о числовых характеристиках функций случайных величин.
30. Законы распределения функций случайных величин. Функция одного и двух случайных аргументов.
31. Закон больших чисел. Лемма и неравенство Чебышева. Центральная предельная теорема.
32. Теорема Чебышева. Теорема Бернулли.
33. Основные понятия выборочной теории. Генеральная совокупность. Выборка.
34. Вариационные ряды. Выборочный метод. Выборочные аналоги интегральной и дифференциальной функции.
35. Точечные оценки. Состоятельные, несмещенные, эффективные. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии.
36. Методы получения точечных оценок. Метод наибольшего правдоподобия. Метод моментов.
37. Интервальные оценки параметров нормального распределения.
38. Интервальные оценки. Оценка биномиального распределения. Понятие доверительной области.
39. Статистическая проверка простых гипотез. Основные понятия и методы построения критериев. Критерий Неймана-Пирсона. Определение объема выборки.
40. Сложные параметрические гипотезы. Сравнение двух дисперсий.
41. Сравнение двух средних.
42. Проверка непараметрических гипотез. Критерий Колмогорова. Критерий «Хи-квадрат».
43. Критерий независимости. Критерий Спирмена. Критерий Пирсона.
44. Основы корреляционного анализа. Генеральное корреляционное отношение. Свойства.
45. Основы регрессионного анализа. Линейная функция регрессии. Коэффициенты корреляции и корреляционного отношения.
46. Поле корреляции. Выборочный коэффициент корреляции. Линейное уравнение регрессии.
47. Проверка гипотезы о линейности функции регрессии.



48. Нелинейная функция регрессии. Анализ множественных связей. Множественная регрессия.
49. Основы дисперсионного анализа. Однофакторный дисперсионный анализ. Модель однофакторного дисперсионного анализа.
50. Двухфакторный дисперсионный анализ. Модель двухфакторного дисперсионного анализа.

**Проверка выполнения самостоятельной работы.** Самостоятельная работа направлена на самостоятельное освоение и закрепление обучающимися практических умений и знаний, овладение общими компетенциями.

Самостоятельная подготовка обучающихся по дисциплине предполагает следующие виды и формы работы:

- решение задач с целью подготовки к контрольным работам №1 - №3.

**Перечень задач для подготовки к контрольной работе**

1. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих датчика. Вероятность исправной работы первого датчика равна 0,9; второго – 0,95; третьего – 0,8. Найти вероятность того, что: а) сработает только один датчик; б) сработает только два датчика; в) сработает хотя бы один датчик.
2. В круг радиуса 10 случайным образом брошена точка так, что ее любое расположение в круге равновозможно. Найти вероятность того, что она окажется внутри лежащего в круге квадрата со стороной 6.
3. Студент знает 25 из 30 вопросов экзамена. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого достаточно ответить на 3 из 5 предложенных экзаменатором вопроса.
4. На спартакиаду прибыло 20 лыжников, 15 гимнастов, 5 шахматистов. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника – 0,8; для гимнаста – 0,6; для шахматиста – 0,9. Случайно вызывается один спортсмен. Какова вероятность того, что он выполнит норму? Спортсмен выполнил норму. Какова вероятность того, что это был шахматист?

5. Независимые дискретные величины  $X$  и  $Y$  заданы законами распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение для случайной величины  $Z=3X-2Y$ . Найти и построить функцию распределения дискретной случайной величины  $X$ .

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | -5  | -4  | 2   | 3   |
| $p$ | 0,1 | 0,5 | 0,2 | 0,2 |

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $Y$ | -8  | -1  |
| $p$ | 0,7 | 0,3 |

6. Составить ряд распределения случайной величины  $X$ -числа бракованных деталей в выборке объема  $n=5$ . Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,3. Определить вероятность того, что в выборке будет бракованных: а) ровно четыре детали; б) более четырех деталей; в) не более четырех деталей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины  $X$ .

7. Случайная величина  $X$  задана функцией распределения вероятностей  $F(x)$ . Найти:

а) вероятность попадания случайной величины  $X$  в интервал  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ; б) плотность распределения вероятностей случайной величины  $X$ ; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины  $X$ :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

Построить графики функции и плотности распределения случайной величины  $X$ .

8. Среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины равно 0,5. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине не превосходит 1.

#### Перечень задач для подготовки к итоговой контрольной работе

1. По выборкам выполнить следующие расчеты и задания: построить полигон (гистограмму), кумуляту и эмпирическую функцию распределения. Найти среднюю арифметическую, медиану, моду, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, начальные и центральные моменты  $k$  порядка ( $k = 1, 2, 3, 4$ ), коэффициент асимметрии и эксцесс. Ответы сформулировать, используя терминологию задач. Месячный доход жителей заданного региона (в руб.) представлен ниже, где  $n=1000$  жителей.

|       |           |          |           |           |           |            |
|-------|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| $x_i$ | Менее 500 | 500-1000 | 1000-1500 | 1500-2000 | 2000-2500 | Свыше 2500 |
| $n_i$ | 58        | 96       | 239       | 328       | 147       | 132        |

2. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически. По схеме собственно-случайной бесповторной выборки взято 130 из 2000 упаковок, содержащихся в партии, и получены следующие данные об их весе:

| Вес упаковки (гр.) | Менее 975 | 975-1000 | 1000-1025 | 1025-1050 | Более 1050 | Всего |
|--------------------|-----------|----------|-----------|-----------|------------|-------|
| Число упаковок     | 6         | 38       | 44        | 34        | 8          | 130   |

Найти: а) границы, в которых с вероятностью 0,9901 заключен средний вес упаковки в партии; б) вероятность того, что доля упаковок, вес которых менее 1000 гр., во всей партии отличается от доли таких упаковок в выборке не более чем на 0,05 (по абсолютной величине); в) объем бесповторной выборки, при котором те же границы для среднего веса упаковок во всей партии можно гарантировать с вероятностью 0,95.

3. По данным заданий лабораторной работы №2, используя критерий Пирсона и критерия Колмогорова, при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  проверить гипотезу о том, что случайная величина  $X$  распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.
4. На некотором предприятии, работающем в три смены, получены данные о проценте брака выпускаемой продукции в каждой из смен за семь последовательных дней (данные представлены в таблице). Проверить отсутствие влияния смены работающих на процент брака выпускаемой продукции.

| Смена (уровни) | Результаты опытов, % брака |     |     |     |     |     |     |
|----------------|----------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|                | ПН                         | ВТ  | СР  | ЧТ  | ПТ  | СБ  | ВС  |
| 1              | 2,0                        | 1,5 | 3,0 | 6,0 | 0,2 | 0   | 1,0 |
| 2              | 1,5                        | 4,0 | 4,0 | 0   | 0   | 2,5 | 1,5 |
| 3              | 1,5                        | 1,5 | 6,0 | 6,0 | 0   | 3,0 | 1,0 |

**Проверка выполнения контрольных работ.** Контрольная работа проводится с целью контроля усвоенных умений и знаний и последующего анализа типичных ошибок и затруднений, обучающихся в конце изучения темы или раздела. Согласно календарно-тематическому плану дисциплины предусмотрено проведение следующих контрольных работ: контрольная работа, итоговая контрольная работа

#### **Задания для самостоятельных работ**

1. Спортсмен должен последовательно преодолеть 4 препятствия, каждое из которых преодолевается им с вероятностью  $p = 0,9$ . Если спортсмен не преодолевает какое-либо препятствие, он выбывает из соревнований. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа препятствий, преодоленных спортсменом. Найти вероятность того, что спортсмен преодолеет:
- а) не более двух препятствий;
  - б) более трёх препятствий.

2. Плотность распределения случайной величины  $X$  имеет вид  $f(x) = a x^2 e^{-kx}$ , где  $k > 0, 0 \leq x < \infty$ . Найти:
- коэффициент  $a$ ;
  - функцию распределения случайной величины  $X$ ;
  - вычислить вероятность попадания случайной величины  $X$  на интервал.
3. По выборкам выполнить следующие расчеты и задания: построить полигон (гистограмму), кумуляту и эмпирическую функцию распределения. Найти среднюю арифметическую, медиану, моду, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, начальные и центральные моменты  $k$  порядка  $(k = 1, 2, 3, 4)$ , коэффициент асимметрии и эксцесс. Ответы сформулировать, используя терминологию задач. В таблице представлены число сделок на фондовой бирже за квартал, где  $n=400$  инвесторов.

|       |     |    |    |    |    |    |   |   |   |   |    |
|-------|-----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|----|
| $x_i$ | 0   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $n_i$ | 146 | 97 | 73 | 34 | 23 | 10 | 6 | 3 | 4 | 2 | 2  |

4. На некотором предприятии, работающем в три смены, получены данные о проценте брака выпускаемой продукции в каждой из смен за семь последовательных дней (данные представлены в таблице). Проверить отсутствие влияния смены работающих на процент брака выпускаемой продукции.

| Смена (уровни) | Результаты опытов, % брака |     |     |     |     |     |     |
|----------------|----------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|                | ПН                         | ВТ  | СР  | ЧТ  | ПТ  | СБ  | ВС  |
| 1              | 2,0                        | 1,5 | 3,0 | 6,0 | 0,2 | 0   | 1,0 |
| 2              | 1,5                        | 4,0 | 4,0 | 0   | 0   | 2,5 | 1,5 |
| 3              | 1,5                        | 1,5 | 6,0 | 6,0 | 0   | 3,0 | 1,0 |

#### Сводная таблица по применяемым формам и методам текущего контроля и оценки результатов обучения

| Результаты обучения<br>(освоенные умения, усвоенные знания)                      | Формы и методы контроля и оценки результатов обучения                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Освоенные умения:</b>                                                         |                                                                                                                                              |
| распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия.<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |
| анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части                | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия                                                      |

|                                                                                                                                         |                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                         | Контрольная работа, итоговая контрольная работа.                                                                                            |
| определять этапы решения задачи                                                                                                         | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |
| выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы                                                  | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |
| составить план действия; определить необходимые ресурсы                                                                                 | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |
| владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах                                                                 | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |
| реализовать составленный план                                                                                                           | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |
| оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)                                              | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |
| определять задачи для поиска информации; определять необходимые источники информации; планировать процесс поиска                        | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |
| структурировать получаемую информацию                                                                                                   | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |
| выделять наиболее значимое в перечне информации; оценивать практическую значимость результатов поиска; оформлять результаты поиска      | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |
| организовывать работу коллектива и команды; взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |

|                                                                                                                                                        |                                                                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                        | работа.                                                                                                                                     |
| грамотно излагать свои мысли и оформлять документы по профессиональной тематике на государственном языке, проявлять толерантность в рабочем коллективе | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |
| применять средства информационных технологий для решения профессиональных задач                                                                        | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |
| использовать современное программное обеспечение                                                                                                       | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |
| понимать общий смысл четко произнесенных высказываний на известные темы (профессиональные и бытовые), понимать тексты на базовые профессиональные темы | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |
| участвовать в диалогах на знакомые общие и профессиональные темы; строить простые высказывания о себе и о своей профессиональной деятельности          | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |
| кратко обосновывать и объяснить свои действия (текущие и планируемые)                                                                                  | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |
| писать простые связные сообщения на знакомые или интересующие профессиональные темы                                                                    | Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br>Решение задач во время занятия<br>Контрольная работа, итоговая контрольная работа. |
| <b>Усвоенные знания:</b>                                                                                                                               |                                                                                                                                             |
| актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить                                                                | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос во время занятия                                                              |
| основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте                                      | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос во время занятия                                                              |
| алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях                                                                                       | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия                            |
| методы работы в профессиональной и смежных сферах                                                                                                      | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия                            |

|                                                                                                                                   |                                                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| структуру плана для решения задач                                                                                                 | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия |
| порядок оценки результатов решения задач профессиональной деятельности                                                            | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия |
| номенклатуры информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности                                               | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия |
| приемы структурирования информации                                                                                                | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия |
| формат оформления результатов поиска информации                                                                                   | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия |
| психологические основы деятельности коллектива, психологические особенности личности                                              | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия |
| основы проектной деятельности                                                                                                     | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия |
| особенности социального и культурного контекста                                                                                   | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия |
| правила оформления документов и построения устных сообщений                                                                       | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия |
| современные средства и устройства информатизации; порядок их применения и программное обеспечение в профессиональной деятельности | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия |
| правила построения простых и сложных предложений на профессиональные темы                                                         | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия |
| основные общеупотребительные глаголы (бытовая и профессиональная лексика)                                                         | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия |
| лексический минимум, относящийся к описанию предметов, средств и процессов профессиональной деятельности                          | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия |
| особенности произношения                                                                                                          | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия |
| правила чтения текстов профессиональной направленности                                                                            | Контрольная работа, итоговая контрольная работа. Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия |

### 3.2 Форма промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация по дисциплине в форме контрольной работы в 1 семестре и в форме итоговой контрольной работы во 2 семестре.

#### **4. Система оценивания комплекта ФОС текущего контроля и промежуточной аттестации**

**Каждый вид работы оценивается по пяти бальной шкале.**

«5» (отлично) – за глубокое и полное овладение содержанием учебного материала, в котором обучающийся свободно и уверенно ориентируется; за умение практически применять теоретические знания, высказывать и обосновывать свои суждения. Оценка «5» (отлично) предполагает грамотное и логичное изложение ответа.

«4» (хорошо) – если обучающийся полно освоил учебный материал, владеет научно-понятийным аппаратом, ориентируется в изученном материале, осознанно применяет теоретические знания на практике, грамотно излагает ответ, но содержание и форма ответа имеют отдельные неточности.

«3» (удовлетворительно) – если обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений учебного материала, но излагает его неполно, непоследовательно, допускает неточности в применении теоретических знаний при ответе на практико-ориентированные вопросы; не умеет доказательно обосновать собственные суждения.

«2» (неудовлетворительно) – если обучающийся имеет разрозненные, бессистемные знания, допускает ошибки в определении базовых понятий, искажает их смысл; не может практически применять теоретические знания.

**Критерии оценивания ответа по устному опросу.**

«5» (отлично) – за глубокое и полное овладение содержанием учебного материала, в котором обучающийся свободно и уверенно ориентируется; за умение практически применять теоретические знания, высказывать и обосновывать свои суждения; за грамотное и логичное изложение ответа.

«4» (хорошо) – если обучающийся полно освоил учебный материал, владеет научно-понятийным аппаратом, ориентируется в изученном материале, осознанно применяет теоретические знания на практике, грамотно излагает ответ, но содержание и форма ответа имеют отдельные неточности.

«3» (удовлетворительно) – если обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений учебного материала, но излагает его неполно, непоследовательно, допускает неточности в применении теоретических знаний при ответе на практико-ориентированные вопросы; не умеет доказательно обосновать собственные суждения.

«2» (неудовлетворительно) – если обучающийся имеет разрозненные, бессистемные знания, допускает ошибки в определении базовых понятий, искажает их смысл; не может практически применять теоретические знания.

**Критерии оценивания опорных конспектов.**

«5» (отлично) – аккуратность выполнения, читаемость текста, грамотность (терминологическая и орфографическая), полное раскрытие темы конспекта.

«4» (хорошо) – тема конспекта раскрыта, однако материал изложен недостаточно логично; аккуратность выполнения, читаемость конспекта, грамотность (терминологическая и орфографическая).

«3» (удовлетворительно) – материал изложен недостаточно логично, неаккуратное выполнение, читаемость конспекта, грамотность (терминологическая и орфографическая), тема конспекта раскрыта не в полной мере.

«2» (неудовлетворительно) – материал изложен нелогично, допущены терминологические и орфографические ошибки, неразборчивый почерк, тема конспекта не раскрыта.

**Критерии оценивания контрольной работы**

Задание к контрольной работе состоит из пяти задач, каждая из которых оценивается в 1 балл.

Решение всех пяти задач соответствует оценке «отлично».

Решение четырех задач соответствует оценке «хорошо».



Решение трех задач соответствует оценке «удовлетворительно».

Решение только двух задач соответствует оценке «неудовлетворительно».

### **Критерии оценивания итоговой контрольной работы**

Задание к контрольной работе состоит из пяти задач, каждая из которых оценивается в 1 балл.

Решение всех пяти задач соответствует оценке «отлично».

Решение четырех задач соответствует оценке «хорошо».

Решение трех задач соответствует оценке «удовлетворительно».

Решение только двух задач соответствует оценке «неудовлетворительно».