

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Сыров Игорь Анатольевич  
Должность: Директор  
Дата подписания: 28.03.2025 10:58:20  
Уникальный программный ключ:  
b683afe664d7e9f64175886c19626a198149ad36

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

Стерлитамакский филиал

Колледж

### Фонд оценочных средств

по дисциплине

ОУП. 12 Математика

Общеобразовательный цикл, обязательная часть

цикл дисциплины и его часть (обязательная, вариативная)

**38.02.06**

код

специальность

Финансы

наименование специальности

квалификация

Финансист

Разработчик (составитель)

С.Г. Дмитриева преподаватель

высшей категории

ученая степень, ученое звание,  
категория, Ф.И.О.

Стерлитамак 2025

## **I Паспорт фондов оценочных средств**

### **1. Область применения**

**Фонд оценочных средств (ФОС)** предназначен для проверки результатов освоения дисциплины ОУП.12 Математика, входящей в состав программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 38.02.06 Финансы (укрупнённая группа специальностей 38.00.00 Экономика и управление (уровень3)).

**Работа обучающихся во взаимодействии с преподавателем 332 часов**

### **2. Объекты оценивания – результаты освоения дисциплины**

ФОС позволяет оценить следующие результаты освоения дисциплины:

#### **Личностных:**

*Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к себе, к своему здоровью, к познанию себя:*

-готовность и способность обучающихся к отстаиванию личного достоинства, собственного мнения, готовность и способность вырабатывать собственную позицию по отношению к общественно-политическим событиям прошлого и настоящего на основе осознания и осмысления истории, духовных ценностей и достижений нашей страны;

*Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к России как к Родине (Отечеству):*

-формирование уважения к русскому языку как государственному языку Российской Федерации, являющемуся основой российской идентичности и главным фактором национального самоопределения;

*Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к закону, государству и к гражданскому обществу:*

-мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики, основанное на диалоге культур, а также различных форм общественного сознания, осознание своего места в поликультурном мире;

*Личностные результаты в сфере отношений обучающихся с окружающими людьми:*

-нравственное сознание и поведение на основе усвоения общечеловеческих ценностей, толерантного сознания и поведения в поликультурном мире, готовности и способности вести диалог с другими людьми, достигать в нем взаимопонимания, находить общие цели и сотрудничать для их достижения;

-развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.

*Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к окружающему миру, живой природе, художественной культуре:*

-готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

-эстетическое отношения к миру, готовность к эстетическому обустройству собственного быта.

*Личностные результаты в сфере отношения обучающихся к труду, в сфере социально-экономических отношений:*

-осознанный выбор будущей профессии как путь и способ реализации собственных жизненных планов;

-готовность обучающихся к трудовой профессиональной деятельности как к возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем;

-готовность к самообслуживанию, включая обучение и выполнение домашних обязанностей.

### **Метапредметных:**

Метапредметные результаты освоения основной образовательной программы представлены тремя группами универсальных учебных действий (УУД).

#### **1. Регулятивные универсальные учебные действия**

Обучающийся научится:

-ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;

#### **2. Познавательные универсальные учебные действия**

Обучающийся научится:

-находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;

#### **3. Коммуникативные универсальные учебные действия**

Обучающийся научится:

-развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств.

### **Предметных:**

В результате изучения учебного предмета «Математика» на уровне среднего общего образования обучающийся на углубленном уровне научится:

использовать числовые множества на координатной прямой и на координатной плоскости для описания реальных процессов и явлений; проводить доказательные рассуждения в ситуациях повседневной жизни, при решении задач из других предметов;

выполнять и объяснять сравнение результатов вычислений при решении практических задач, в том числе приближенных вычислений, используя разные способы сравнений; записывать, сравнивать, округлять числовые данные реальных величин с использованием разных систем измерения; составлять и оценивать разными способами числовые выражения при решении практических задач и задач из других учебных предметов;

составлять и решать уравнения, неравенства, их системы при решении задач других учебных предметов; выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений, неравенств и их систем при решении задач других учебных предметов; составлять и решать уравнения и неравенства с параметрами при решении задач других учебных предметов; составлять уравнение, неравенство или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты; использовать программные средства при решении отдельных классов уравнений и неравенств;

определять по графикам и использовать для решения прикладных задач свойства реальных процессов и зависимостей (наибольшие и наименьшие значения, промежутки возрастания и убывания функции, промежутки знакопостоянства, асимптоты, точки перегиба, период и т.п.); интерпретировать свойства в контексте конкретной практической ситуации; определять по графикам простейшие характеристики периодических процессов в биологии, экономике, музыке, радиосвязи и др. (амплитуда, период и т.п.);

решать прикладные задачи из биологии, физики, химии, экономики и других предметов, связанные с исследованием характеристик процессов; интерпретировать полученные результаты;

вычислять или оценивать вероятности событий в реальной жизни; выбирать методы подходящего представления и обработки данных;

составлять с использованием свойств геометрических фигур математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат;

владеть понятиями векторы и их координаты; уметь выполнять операции над

векторами; использовать скалярное произведение векторов при решении задач; применять уравнение плоскости, формулу расстояния между точками, уравнение сферы при решении задач; применять векторы и метод координат в пространстве при решении задач.

**Обучающийся на углубленном уровне получит возможность научиться:**

использовать теоретико-множественный язык и язык логики для описания реальных процессов и явлений, при решении задач других учебных предметов

свободно оперировать числовыми множествами при решении задач;

понимать причины и основные идеи расширения числовых множеств;

владеть основными понятиями теории делимости при решении стандартных задач

иметь базовые представления о множестве комплексных чисел;

свободно выполнять тождественные преобразования тригонометрических, логарифмических, степенных выражений;

владеть формулой бинома Ньютона;

уметь выполнять запись числа в позиционной системе счисления;

применять при решении задач Основную теорему алгебры;

применять при решении задач простейшие функции комплексной переменной как геометрические преобразования

свободно определять тип и выбирать метод решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств, иррациональных уравнений и неравенств, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем;

свободно решать системы линейных уравнений;

решать основные типы уравнений и неравенств с параметрами;

применять при решении задач неравенства Коши-Буняковского, Бернулли;

владеть понятием асимптоты и уметь его применять при решении задач;

применять методы решения простейших дифференциальных уравнений первого и второго порядков;

свободно владеть стандартным аппаратом математического анализа для вычисления производных функции одной переменной;

свободно применять аппарат математического анализа для исследования функций и построения графиков, в том числе исследования на выпуклость;

оперировать понятием первообразной функции для решения задач;

овладеть основными сведениями об интеграле Ньютона–Лейбница и его простейших применениях

оперировать в стандартных ситуациях производными высших порядков;

уметь применять при решении задач свойства непрерывных функций;

уметь применять приложение производной и определенного интеграла к решению задач естествознания;

владеть понятиями вторая производная, выпуклость графика функции и уметь исследовать функцию на выпуклость

иметь представление о центральной предельной теореме

иметь представление о выборочном коэффициенте корреляции и линейной регрессии;

иметь представление о статистических гипотезах и проверке статистической гипотезы, о статистике критерия и ее уровне значимости;

иметь представление о связи эмпирических и теоретических распределений

иметь представление о статистических гипотезах и проверке статистической гипотезы, о статистике критерия и ее уровне значимости;

иметь представление об аксиоматическом методе;

уметь применять для решения задач свойства плоских и двугранных углов, трехгранного угла, теоремы косинусов и синусов для трехгранного угла;

владеть понятием перпендикулярное сечение призмы и уметь применять его при решении задач;

иметь представление о двойственности правильных многогранников;

иметь представление об аксиомах объема, применять формулы объемов прямоугольного параллелепипеда, призмы и пирамиды, тетраэдра при решении задач;  
иметь представление о движениях в пространстве: параллельном переносе, симметрии относительно плоскости, центральной симметрии, повороте относительно прямой, винтовой симметрии, уметь применять их при решении задач;  
уметь применять формулы объемов при решении задач;  
находить объем параллелепипеда и тетраэдра, заданных координатами своих вершин;  
- задавать прямую в пространстве;  
находить расстояние от точки до плоскости в системе координат;  
находить расстояние между скрещивающимися прямыми, заданными в системе координат.

### **3 Формы контроля и оценки результатов освоения дисциплины**

Контроль и оценка результатов освоения – это выявление, измерение и оценивание результатов освоения дисциплины.

В соответствии с учебным планом специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование, рабочей программой общеобразовательной учебной дисциплины Математика предусматривается текущий и промежуточный контроль результатов освоения.

#### **3.1 Формы текущего контроля**

Текущий контроль успеваемости представляет собой проверку усвоения учебного материала, регулярно осуществляемую на протяжении курса обучения.

Текущий контроль результатов освоения дисциплины в соответствии с рабочей программой и календарно-тематическим планом происходит при использовании следующих обязательных форм контроля:

- выполнение и защита практических работ,
- проверка выполнения самостоятельной работы студентов,
- проверка выполнения контрольных работ.

Во время проведения учебных занятий дополнительно используются следующие формы текущего контроля – устный опрос, решение задач, тестирование по темам отдельных занятий.

**Выполнение и защита практических работ.** Практические работы проводятся с целью усвоения и закрепления результатов освоения дисциплины. В ходе практической работы обучающиеся учатся использовать формулы, и применять различные методики расчета, анализировать полученные результаты и делать выводы, опираясь на теоретические знания.

#### **Список практических работ:**

- Практическая работа №1 «Выполнение арифметических действий над числами»  
Практическая работа №2 «Тригонометрическая форма записи комплексного числа»  
Практическая работа №3 «Изображение комплексного числа на координатной плоскости. Формула Муавра».  
Практическая работа №4 «Применение комплексных чисел при решении физических и геометрических задач»  
Практическая работа №5 «Степень с натуральным и целым показателем»  
Практическая работа №6 «Арифметический корень натуральной степени»  
Практическая работа №7 «Вычисление корней натуральной степени»  
Практическая работа №8 «Преобразование числовых и буквенных выражений, содержащих степени»  
Практическая работа №9 «Взаимно обратные функции»  
Практическая работа №10 «Решение показательных уравнений»

Практическая работа №11 «Системы показательных уравнений и неравенств»  
 Практическая работа №12 «Решение прикладных задач на сложные проценты»  
 Практическая работа №13 «Десятичные и натуральные логарифмы»  
 Практическая работа №14 «Логарифмические уравнения»  
 Практическая работа №15 «Решение уравнений графическим методом»  
 Практическая работа №16 «Решение логарифмических уравнений и неравенств»  
 Практическая работа №17 «Подготовка к контрольной работе.»  
 Практическая работа №18 «Применение основных тригонометрических тождеств»  
 Практическая работа №19 «Применение формул двойного и половинного углов»  
 Практическая работа №20 «Применение основных тригонометрических формул для преобразования тригонометрических выражений»  
 Практическая работа №21 «Решение простейших тригонометрических уравнений»  
 Практическая работа №22 «Решение тригонометрических уравнений методом приведения к линейному и квадратному уравнению»  
 Практическая работа №23 «Решение простейших тригонометрических неравенств.»  
 Практическая работа №24 «Повторение пройденного материала»  
 Практическая работа №25 «Функциональные зависимости в реальных процессах»  
 Практическая работа №26 «Исследование функции»  
 Практическая работа №27 «Размещения, сочетания, перестановки»  
 Практическая работа №28 «Решение практических задач с использованием правил перестановки и размещения комбинаторики»  
 Практическая работа №29 «Решение практических задач с применением правил размещения и сочетания»  
 Практическая работа №30 «Решение задач комбинаторики, применяя бином Ньютона и треугольник Паскаля»  
 Практическая работа №31 «Решение задач с применением свойств вероятностей»  
 Практическая работа №32 «Меры разброса случайной величины»  
 Практическая работа №33 «Решение практических задач на обработку числовых данных»  
 Практическая работа №34 «Арифметическая и геометрическая прогрессия»  
 Практическая работа №35 «Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии»  
 Практическая работа №36 «Использование прогрессии для решения реальных задач прикладного характера»  
 Практическая работа №37 «Применение таблицы производных элементарных функций»  
 Практическая работа №38 «Связь производной и промежутков возрастания и убывания функции»  
 Практическая работа №39 «Проведение с помощью производной исследования функции»  
 Практическая работа №40 «Наибольшее и наименьшее значение функции»  
 Практическая работа №41 «Вторая производная функций»  
 Практическая работа №42 «Выпуклость графика функции, точки перегиба»  
 Практическая работа №43 «Применение производной к построению графиков функций»  
 Практическая работа №44 «Использование геометрического и физического смысла производной для решения задач»  
 Практическая работа №45 «Подготовка к контрольной работе»  
 Практическая работа №46 «Правила нахождения первообразных»  
 Практическая работа №47 «Решение задач на связь первообразной и ее производной»  
 Практическая работа №48 «Применение интеграла для вычисления площадей»  
 Практическая работа №49 «Применение интеграла для вычисления физических величин!»  
 Практическая работа №50 «Применение производной и интеграла к решению практических задач»  
 Практическая работа №51 «Метод разложения на множители»  
 Практическая работа №52 «Метод введения новой переменной для решения уравнений»  
 Практическая работа №53 «Решение неравенств с одной переменной»

Практическая работа №54 «Системы уравнений. Метод подстановки»  
 Практическая работа №55 «Системы уравнений. Метод алгебраического сложения»  
 Практическая работа №56 «Системы уравнений. Метод введения новых переменных»  
 Практическая работа №57 «Применение математических методов для решения содержательных задач»  
 Практическая работа №58 «Прямоугольный параллелепипед»  
 Практическая работа №59 «Решение стереометрических задач, связанных с перпендикулярностью прямых и плоскостей, используя планиметрические факты и методы»  
 Практическая работа №60 «Подготовка к контрольной работе»  
 Практическая работа №61 «Площадь поверхности призмы, пирамиды»  
 Практическая работа №62 «Площадь поверхности цилиндра»  
 Практическая работа №53 «Площадь боковой и полной поверхности конуса»  
 Практическая работа №64 «Вычисление площади поверхности тел вращения.»  
 Практическая работа №65 «Объем призмы, цилиндра, пирамиды, конуса и шара»  
 Практическая работа №66 «Комбинация многогранников и тел вращения.»  
 Практическая работа №67 «Решение задач с применением формул объема тел.»  
 Практическая работа №68 «Подготовка к контрольной работе»  
 Практическая работа №69 «Простейшие задачи в координатах»  
 Практическая работа №70 «Решение задач с помощью координат»  
 Практическая работа №71 «Повторение изученного»  
 Практическая работа №72 «Повторение изученного»

### Практическая работа №1 «Выполнение арифметических действий над числами»

**1** Записать в виде десятичной дроби:

1)  $\frac{2}{3}$ ; 2)  $\frac{8}{11}$ ; 3)  $\frac{3}{5}$ ; 4)  $-\frac{3}{4}$ ; 5)  $-8\frac{2}{7}$ ; 6)  $\frac{13}{99}$ .

**2** Выполнить действия и записать результат в виде десятичной дроби:

1)  $\frac{2}{11} + \frac{1}{9}$ ; 2)  $\frac{8}{13} + \frac{2}{3}$ ; 3)  $\frac{1}{3} + 1,25$ ;  
 4)  $\frac{1}{6} + 0,33$ ; 5)  $\frac{3}{14} \cdot 1,05$ ; 6)  $\frac{7}{9} \cdot 1,7$ .

**3** Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь:

1) 0,(6); 2) 1,(55); 3) 0,1(2);  
 4) -0,(8); 5) -3,(27); 6) -2,3(82).

**4** Вычислить:

1)  $(20,88 : 18 + 45 : 0,36) : (19,59 + 11,95)$ ;  
 2)  $\frac{7}{36} \cdot 9 + 8 \cdot \frac{11}{32} + \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{18}$ .

**5** Вычислить:

1)  $\left(3\frac{4}{25} + 0,24\right) 2,15 + \left(5,1625 - 2\frac{3}{16}\right) \frac{2}{5}$ ;  
 2)  $0,364 : \frac{7}{25} + \frac{5}{16} : 0,125 + 2\frac{1}{2} \cdot 0,8$ .

### Практическая работа №2 «Тригонометрическая форма записи комплексного числа»

### Упражнение 1.

а. Решить квадратные уравнения:

$$a) x^2 + x + 1 = 0; \quad \text{Ответ: } -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$b) x^2 - x + 1 = 0; \quad \text{Ответ: } \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$c) x^2 + 1 = 0; \quad \text{Ответ: } \pm 1$$

$$d) 2x^2 + 3 = 0; \quad \text{Ответ: } \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$e) x^2 - 10x + 41 = 0. \quad \text{Ответ: } 5 \pm 4i$$

б. Найти действительные числа  $x$  и  $y$  из условия равенства комплексных чисел:

$$a) 9 + 2xi + 4yi = 10i + 5x - 6y; \quad \text{Ответ: } (1; 3)$$

$$b) (1+i)x + (2+i)y = 3i + 1; \quad \text{Ответ: } (5; -2)$$

$$c) 5x - 2y + (x+y)i = 4 + 5i. \quad \text{Ответ: } (2; 3)$$

с. Выполнить действие:  $(4+2i) + (1+5i)$

д. Найти произведение комплексных чисел  $z_1 = 3+2i$  и  $z_2 = -1-i$ .

е. Найти частное от деления  $z_1 = 3+4i$  на число  $z_2 = 2-5i$ .

### Упражнение 2.

**2.1.** Даны числа  $z_1 = 2+3i$ ,  $z_2 = 1-2i$ . Найдите числа:

$$a) z_1 + z_2; \quad \text{Ответ: } 3-i$$

$$b) z_1 - z_2; \quad \text{Ответ: } 1+5i$$

$$c) z_1 \cdot z_2; \quad \text{Ответ: } 8-i$$

$$d) \frac{z_1}{z_2}. \quad \text{Ответ: } -0,8+i$$

**2.2.** Дано:  $z = 2 + i$ . Найдите  $z^n$ , если  $n = 2, 3, 4$ .

$$\text{Ответ: } 3-4i; 2+11i; -7-24i$$

**2.3.** Найдите  $x$  и  $y$  из уравнения  $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$ ,

$$\text{где } x, y \in \mathbf{R}. \quad \text{Ответ: } \left(-\frac{4}{11}; \frac{5}{11}\right)$$

**2.4.** Вычислите:

$$a) \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2; \quad \text{Ответ: } -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

## Практическая работа №3 «Изображение комплексного числа на координатной плоскости. Формула Муавра».

### Упражнение 1.

1.1. На комплексной плоскости построить точки:

$$a) z = 2+2i; \quad c) z = -1-i; \quad d) z = -1+i; \quad e) z = -i; \quad f) z = -4$$

1.2 Найдите комплексно-сопряженные числа для следующих чисел и постройте их на комплексной плоскости:



a)  $z=3-2i$ ;

Ответ:  $\bar{z}=3+2i$

b)  $z=-2-i$ ;

Ответ:  $\bar{z}=-2+i$

c)  $z=5i$ ;

Ответ:  $\bar{z}=-5i$

d)  $z=i$ ;

Ответ:  $\bar{z}=-i$

e)  $z=6$ .

Ответ:  $\bar{z}=6$

1.3.

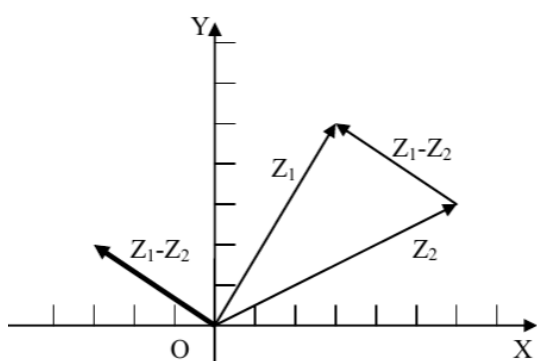
Выполнить действие  $(3+5i)-(6+3i)$  и изобразить геометрически.

Решение:

$$(3+5i) - (6+3i) = (3-6) + (5-3)i = -3+2i, \text{ или}$$

$$(3+5i) - (6+3i) = \underline{3}+5i-\underline{6}-3i = -3+2i.$$

I способ.

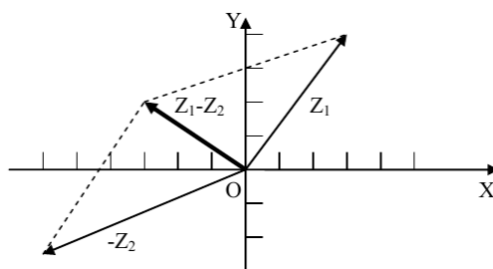


II способ.

$$z_1 = 3+5i; z_2 = 6+3i$$

$$-z_2 = -6-3i.$$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$



1.4 Возведите в степень

1)  $(2 \cdot (\cos 138^\circ + i \cdot \sin 138^\circ))^4$

Ответ:  $16 \cdot (\cos 192^\circ + i \cdot \sin 192^\circ)$

2)  $(\cos \frac{3\pi}{8} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{8})^{16}$

Ответ:  $(\cos 0 + i \cdot \sin 0)$

3)  $0.1 \cdot (\cos \frac{3\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{5})^5$

Ответ:  $0.1 \cdot (\cos \pi + i \cdot \sin \pi)$

4)  $(\cos \frac{9\pi}{20} + i \cdot \sin \frac{9\pi}{20})^{40}$

Ответ:  $(\cos 0 + i \cdot \sin 0)$

**Практическая работа №4** «Применение комплексных чисел при решении физических и геометрических задач»

№1. Выполните сложение и вычитание комплексных чисел: (3 балла)

- 1)  $z_1 = -3 + 5i, z_2 = 4 - 7i$ ;
- 2)  $z_1 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4}i, z_2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}i$ ;
- 3)  $z_1 = -0,6 + 0,2i, z_2 = -0,4 - 0,5i$ ;

№ 2. (1 балл)

Выполните графически сложение чисел  $z_1 = -1 + 3i$  и  $z_2 = 4 + 5i$ .

№3. (4 балла)

Найдите произведение комплексных чисел:

- 1)  $z_1 = 2 - 3i, z_2 = -4 + i$ ;
- 2)  $z_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}i, z_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{4}i$ ;
- 3)  $z_1 = \sqrt{5}i, z_2 = 4\sqrt{5}i$ ;
- 4)  $z_1 = 5 - 3i, z_2 = 2i$ .

№4. (3 балла)

Выполните действия:

- 1)  $\frac{1}{i}$ ;
- 2)  $\frac{1}{1-i}$ ;
- 3)  $\frac{3-2i}{1+3i}$ .

№ 5. (2 балла)

Возвести в степень комплексные числа  $2i$  и  $\left(\frac{i}{2}\right)^8$ .

№ 6. Решите квадратные уравнения: (3 балла)

- а)  $x^2 - 2x + 2 = 0$ ;
- б)  $4x^2 + 4x + 5 = 0$ ;
- в)  $x^2 - 14x + 74 = 0$ .

**Практическая работа №5** «Степень с натуральным и целым показателем»

| 1 вариант                                                                                                         | 2 вариант                                                                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| №1 Вычислить: 2 балла                                                                                             |                                                                                                                                                                            |
| а) $\sqrt[3]{-216}$ ; б) $\sqrt[5]{32}$ ;                                                                         | в) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$ ; г) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$ .                                                                                                             |
| №2. Решите уравнение: 2 балла                                                                                     |                                                                                                                                                                            |
| а) $x^3=64$ ; б) $x^4-81=0$ ;                                                                                     | в) $16x^4-1=0$ ; г) $12\frac{3}{4}-\frac{3}{4}x^2=0$ .                                                                                                                     |
| №3. Вычислить: 2 балла                                                                                            |                                                                                                                                                                            |
| а) $\sqrt[3]{0,008 \cdot 27}$ ; б) $\frac{\sqrt[3]{24}}{4\sqrt[3]{2}}$ ;                                          | в) $\frac{5\sqrt[3]{17}}{\sqrt[3]{136}}$ ; г) $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}$ .                                                                                       |
| №4. Упростите выражение: 2 балла                                                                                  |                                                                                                                                                                            |
| а) $\sqrt[4]{2^{14}q^{28}}$ ;<br>б) $\sqrt[5]{11^5a^{10}}$ ;<br>в) $\frac{\sqrt[3]{375n^2}}{\sqrt[3]{3n^{14}}}$ ; | г) $\sqrt[4]{8x^3y^5} \cdot \sqrt[4]{2xy^7}$ ;<br>д) $\sqrt[5]{\frac{8c^2}{d}} : \sqrt[5]{\frac{d^9}{4c^3}}$ ;<br>е) $\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}$ . |
| №5. Вынесите множитель из-под знака корня. 2 балла                                                                |                                                                                                                                                                            |
| а) $\sqrt[5]{-128a^7}$ ;                                                                                          | б) $\sqrt[4]{6a^{12}b^6}$ .                                                                                                                                                |
| №6. Внесите множитель под знак корня. 2 балла                                                                     |                                                                                                                                                                            |
| $2a \cdot \sqrt[4]{3a}, a > 0$                                                                                    | $2b \cdot \sqrt[5]{5b^2}, b > 0$                                                                                                                                           |

#### Практическая работа №6 «Арифметический корень натуральной степени»

| Номер задания               | 1 вариант                                                       | 2 вариант                                                      |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| <b>Вычислить:</b>           |                                                                 |                                                                |
| 1                           | $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{625}$                      | $\sqrt[3]{-1000} - \frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$                   |
| 2                           | $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} + \sqrt[3]{-0,001} - \sqrt[4]{0,0016}$ | $\sqrt[5]{32 \cdot 100000}$                                    |
| 3                           | $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$                                      | $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$                                     |
| 4                           | $\sqrt[4]{324} : \sqrt[4]{4}$                                   | $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$                            |
| 5                           | $(\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{5}) : \sqrt[3]{5}$                   | $(\sqrt{25} - \sqrt{45}) : \sqrt{5}$                           |
| <b>Упростить выражение:</b> |                                                                 |                                                                |
| 6                           | $\sqrt[5]{a^6b^7} : \sqrt[5]{ab^2}$                             | $\sqrt[3]{81x^4y} : \sqrt[3]{3xy}$                             |
| 7                           | $\frac{\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}}$        | $\frac{\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}}$         |
| 8                           | $\sqrt[3]{2ab} \cdot \sqrt[3]{4a^2b} \cdot \sqrt[3]{27b}$       | $\sqrt[4]{abc} \cdot \sqrt[4]{a^3b^2c} \cdot \sqrt[4]{b^5c^2}$ |

#### Практическая работа №7 «Преобразование числовых и буквенных выражений,

содержащих степени»

Задание 1.

Представьте данное выражение в виде степени:  $y^{1,7} \cdot y^{2,8} \cdot y^{-1,5}$ .

Задание 2.

Упростите выражение:  $b^{-0,2} : b^{-0,7}$ .

Задание 3.

Упростите выражение:  $(a^{-1,5})^{\frac{2}{3}}$ .

Задание 4.

Сократите дробь:  $\frac{x^{33} - 1}{x^{33} + x^{22} + x^{11}}$ .

Задание 5.

Найдите значение выражения:  $\left( \frac{x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^{-1}}} \right)^{\frac{3}{4}}$  при  $x = 0,0625$ .

Задание 6.

Упростите выражение  $\frac{1 - y^{\frac{3}{2}}}{1 + y^{\frac{1}{2}} + y} + 2\sqrt{y}$ .

Задание 7.

Упростите выражение  $\frac{a^{\frac{2}{3}} - 16}{a^{\frac{1}{3}} - 4} - a^{\frac{1}{3}}$ .

Задание 8.

Найдите значение выражения  $9^{3p} \cdot 3^{-\frac{1}{p}}$  при  $p = \frac{1}{2}$ .

Задание 9.

Найдите значение выражения  $3^{-6p} \cdot \frac{1}{3^{-4p}}$  при  $p = -2$ .

**Практическая работа №8 «Преобразование числовых и буквенных выражений, содержащих степени»**

Задание 1. Представьте данное выражение в виде степени:  $y^{1,7} \cdot y^{2,8} \cdot y^{-1,5}$ .

Задание 2. Упростите выражение:  $b^{-0,2} : b^{-0,7}$ .

Задание 3. Упростите выражение:  $(a^{-1,5})^{\frac{2}{3}}$ .

Задание 4. Сократите дробь:  $\frac{x^{33} - 1}{x^{33} + x^{22} + x^{11}}$ .

Задание 5. Найдите значение выражения:  $\left( \frac{x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^{-1}}} \right)^{\frac{3}{4}}$  при  $x = 0,0625$ .

Задание 6. Упростите выражение  $\frac{1 - y^{\frac{3}{2}}}{1 + y^{\frac{1}{2}} + y} + 2\sqrt{y}$ .

Задание 7. Упростите выражение  $\frac{a^{\frac{2}{3}} - 16}{a^{\frac{1}{3}} - 4} - a^{\frac{1}{3}}$ .

Задание 8. Найдите значение выражения  $9^{3p} \cdot 3^{-\frac{1}{p}}$  при  $p = \frac{1}{2}$ .

Задание 9. Найдите значение выражения  $3^{-6p} \cdot \frac{1}{3^{-4p}}$  при  $p = -2$ .

### Практическая работа №9 «Взаимно обратные функции»

**131** (Устно.) Выяснить, является ли обратимой функция:

- 1)  $y = 3x - 1$ ;      2)  $y = x^2 + 7$ ;      3)  $y = \frac{1}{x}$ ;  
4)  $y = \sqrt{x}$ ;      5)  $y = x^4$ ;      6)  $y = x^4, x < 0$ .

**132** Найти функцию, обратную к данной:

- 1)  $y = 2x - 1$ ;      2)  $y = -5x + 4$ ;  
3)  $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ ;      4)  $y = \frac{3x-1}{2}$ ;  
5)  $y = x^3 + 1$ ;      6)  $y = x^3 - 3$ .

**133** Найти область определения и множество значений функции, обратной к данной:

- 1)  $y = -2x + 1$ ;      2)  $y = \frac{1}{4}x - 7$ ;  
3)  $y = x^3 - 1$ ;      4)  $y = (x-1)^3$ ;  
5)  $y = \frac{2}{x}$ ;      6)  $y = \frac{3}{x-4}$ .

**134** Функция  $y = f(x)$  задана графиком (рис. 21). Построить график функции, обратной к данной.

**135** Являются ли взаимно обратными функции:

- 1)  $y = -x^3$  и  $y = -\sqrt[3]{x}$ ;  
2)  $y = -x^5$  и  $y = \sqrt[5]{x}$ ;  
3)  $y = x^{-3}$  и  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ;  
4)  $y = \sqrt[5]{x^3}$  и  $y = x \sqrt[3]{x^2}$ ?

### Практическая работа №10 «Решение показательных уравнений»

Решите уравнения.

**208** 1)  $4^{x-1} = 1$ ; 2)  $0,3^{3x-2} = 1$ ; 3)  $2^{2x} = 2^{4\sqrt{3}}$ ; 4)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ .

**209** 1)  $27^x = \frac{1}{3}$ ; 2)  $400^x = \frac{1}{20}$ ; 3)  $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$ ; 4)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$ .

**210** 1)  $3 \cdot 9^x = 81$ ; 2)  $2 \cdot 4^x = 64$ ;

3)  $3^{x+\frac{1}{2}} \cdot 3^{x-2} = 1$ ; 4)  $0,5^{x+7} \cdot 0,5^{1-2x} = 2$ ;

5)  $0,6^x \cdot 0,6^3 = \frac{0,6^{2x}}{0,6^5}$ ; 6)  $6^{3x} \cdot \frac{1}{6} = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$ .

**211** 1)  $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$ ; 2)  $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$ ;  
3)  $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$ ; 4)  $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$ .

**212** 1)  $5^x = 8^x$ ; 2)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ; 3)  $3^x = 5^{2x}$ ; 4)  $4^x = 3^{\frac{x}{2}}$ .

**213** 1)  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ ; 2)  $16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0$ ;  
3)  $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ ; 4)  $64^x - 8^x - 56 = 0$ .

**214** 1)  $3^{x^2+x-12} = 1$ ; 2)  $2^{x^2-7x+10} = 1$ ;

3)  $2^{\frac{x-1}{x-2}} = 4$ ; 4)  $0,5^x = 4^{\frac{1}{x+1}}$ .

**Практическая работа №11 «Системы показательных уравнений и неравенств»**

Решите неравенство

**208** 1)  $4^{x-1} = 1$ ; 2)  $0,3^{3x-2} = 1$ ; 3)  $2^{2x} = 2^{4\sqrt{3}}$ ; 4)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ .

**209** 1)  $27^x = \frac{1}{3}$ ; 2)  $400^x = \frac{1}{20}$ ; 3)  $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$ ; 4)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$ .

**210** 1)  $3 \cdot 9^x = 81$ ; 2)  $2 \cdot 4^x = 64$ ;

3)  $3^{x+\frac{1}{2}} \cdot 3^{x-2} = 1$ ; 4)  $0,5^{x+7} \cdot 0,5^{1-2x} = 2$ ;

5)  $0,6^x \cdot 0,6^3 = \frac{0,6^{2x}}{0,6^5}$ ; 6)  $6^{3x} \cdot \frac{1}{6} = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$ .

**211** 1)  $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$ ; 2)  $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$ ;  
3)  $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$ ; 4)  $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$ .

**212** 1)  $5^x = 8^x$ ; 2)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ; 3)  $3^x = 5^{2x}$ ; 4)  $4^x = 3^{\frac{x}{2}}$ .

**213** 1)  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ ; 2)  $16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0$ ;  
3)  $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ ; 4)  $64^x - 8^x - 56 = 0$ .

**214** 1)  $3^{x^2+x-12} = 1$ ; 2)  $2^{x^2-7x+10} = 1$ ;

3)  $2^{\frac{x-1}{x-2}} = 4$ ; 4)  $0,5^x = 4^{\frac{1}{x+1}}$ .

**208** 1)  $4^{x-1} = 1$ ; 2)  $0,3^{3x-2} = 1$ ; 3)  $2^{2x} = 2^{4\sqrt{3}}$ ; 4)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ .

**209** 1)  $27^x = \frac{1}{3}$ ; 2)  $400^x = \frac{1}{20}$ ; 3)  $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$ ; 4)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$ .

**210** 1)  $3 \cdot 9^x = 81$ ; 2)  $2 \cdot 4^x = 64$ ;  
3)  $3^{x+\frac{1}{2}} \cdot 3^{x-2} = 1$ ; 4)  $0,5^{x+7} \cdot 0,5^{1-2x} = 2$ ;  
5)  $0,6^x \cdot 0,6^3 = \frac{0,6^{2x}}{0,6^5}$ ; 6)  $6^{3x} \cdot \frac{1}{6} = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$ .

**211** 1)  $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$ ; 2)  $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$ ;  
3)  $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$ ; 4)  $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$ .

**212** 1)  $5^x = 8^x$ ; 2)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ; 3)  $3^x = 5^{2x}$ ; 4)  $4^x = 3^{\frac{x}{2}}$ .

**213** 1)  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ ; 2)  $16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0$ ;  
3)  $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ ; 4)  $64^x - 8^x - 56 = 0$ .

**214** 1)  $3^{x^2+x-12} = 1$ ; 2)  $2^{x^2-7x+10} = 1$ ;  
3)  $2^{\frac{x-1}{x-2}} = 4$ ; 4)  $0,5^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{1}{x+1}}$ .

### Практическая работа №12 «Решение прикладных задач на сложные проценты»

Существует формула для начисления сложного процента:

$$S = A \cdot (1+R)^T$$

A- сумма вклада;

R- ставка процента;

T- количество периодов;

S- получаемая сумма.

Рассмотрим несколько задач, решаемых по этой формуле.

*Задание 1.*

Рассчитать сумму вклада через 3 года при сложной процентной ставке 10% годовых, если было вложено 100000 рублей.

*Задание 2.*

С какой процентной ставкой необходимо вложить деньги в банк, если через 2 года вкладчик хочет получить 120000 рублей при первоначальном взносе 100000 рублей?

*Задание 3.*

За 5 лет при сложной процентной ставке 7% годовых на счету у вкладчика стало 200000 рублей. Сколько денег он вложил в банк?

*Задание 4.*

Для обучения в колледже необходимо 120000 рублей. Родители Оксаны положили в банк 75000 рублей под 6% годовых (сложная процентная ставка). Будет ли у них необходимая сумма, если пока Оксана в первом классе (считать обучение в школе 9 лет)?

*Задание 5.*

Борис хочет вложить 50000 рублей на 5 лет, чтобы получить не меньше 70000 рублей. Один банк предлагает вложить деньги под 8% годовых, а другой - под 0,5% в месяц. Какому банку отдать предпочтение Борису?

*Задание 6.*

Какую сумму нужно вложить в банк, чтобы через 3 года на счету было 59550

рублей, если сложная процентная ставка банка равна 0,5% в месяц?

**Практическая работа №13 «Десятичные и натуральные логарифмы»**

**Вычислить (368—372).**

**368** 1)  $\log_{15} 225$ ; 2)  $\log_4 256$ ; 3)  $\log_3 \frac{1}{243}$ ; 4)  $\log_7 \frac{1}{343}$ .

**369** 1)  $\log_{\frac{1}{4}} 64$ ; 2)  $\log_{\frac{1}{3}} 81$ ; 3)  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$ ; 4)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$ .

**370** 1)  $\log_{11} 1$ ; 2)  $\log_7 7$ ; 3)  $\log_{16} 64$ ; 4)  $\log_{27} 9$ .

**371** 1)  $(0,1)^{-\lg 0,3}$ ; 2)  $10^{-\lg 4}$ ; 3)  $5^{-\lg_5 3}$ ; 4)  $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\lg_6 4}$ .

**372** 1)  $4 \log_{\frac{1}{2}} 3 - \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{2}} 27 - 2 \log_{\frac{1}{2}} 6$ ;  
2)  $\frac{2}{3} \lg 0,001 + \lg \sqrt[3]{1000} - \frac{3}{5} \lg \sqrt{10000}$ .

**373** Вычислить с помощью микрокалькулятора:

1)  $\log_8 7$ ; 2)  $\log_3 12$ ; 3)  $\log_{1,3} 0,17$ ; 4)  $\log_{0,3} 8,1$ .

**Практическая работа №14 «Логарифмические уравнения»**

**208** 1)  $4^{x-1} = 1$ ; 2)  $0,3^{3x-2} = 1$ ; 3)  $2^{2x} = 2^{4\sqrt{3}}$ ; 4)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ .

**209** 1)  $27^x = \frac{1}{3}$ ; 2)  $400^x = \frac{1}{20}$ ; 3)  $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$ ; 4)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$ .

**210** 1)  $3 \cdot 9^x = 81$ ; 2)  $2 \cdot 4^x = 64$ ;  
3)  $3^{x+\frac{1}{2}} \cdot 3^{x-2} = 1$ ; 4)  $0,5^{x+7} \cdot 0,5^{1-2x} = 2$ ;  
5)  $0,6^x \cdot 0,6^3 = \frac{0,6^{2x}}{0,6^5}$ ; 6)  $6^{3x} \cdot \frac{1}{6} = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$ .

**211** 1)  $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$ ; 2)  $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$ ;  
3)  $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$ ; 4)  $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$ .

**212** 1)  $5^x = 8^x$ ; 2)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ; 3)  $3^x = 5^{2x}$ ; 4)  $4^x = 3^{\frac{x}{2}}$ .

**213** 1)  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ ; 2)  $16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0$ ;  
3)  $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ ; 4)  $64^x - 8^x - 56 = 0$ .

**214** 1)  $3^{x^2+x-12} = 1$ ; 2)  $2^{x^2-7x+10} = 1$ ;  
3)  $2^{\frac{x-1}{x-2}} = 4$ ; 4)  $0,5^x = 4^{\frac{1}{x+1}}$ .

**Практическая работа №15 «Решение уравнений графическим методом»**



Алгоритм решения системы двух уравнений с двумя неизвестными графическим методом:

- 1) построить график первого уравнения;
- 2) построить график второго уравнения;
- 3) определить точки пересечения графиков (решением системы уравнений являются координаты каждой найденной точки).

**Пример:**

решить систему уравнений 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y - x = -3; \end{cases}$$

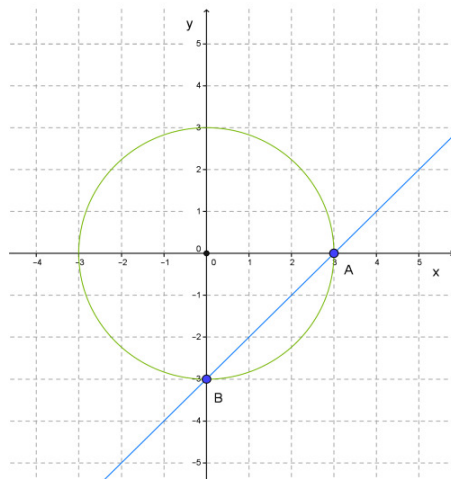
**Решение**

1. Начертим график первого уравнения  $x^2 + y^2 = 9$ .

Графиком уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом 3.

2. Начертим график второго уравнения  $y = x - 3$  (выразили  $y$ ).

Это прямая, для построения которой найдём две точки:  $(0; -3)$  и  $(3; 0)$ .



3. Окружность и прямая пересекаются в точках  $A$  и  $B$ .

Точка  $A$  имеет координаты  $(3; 0)$ , а точка  $B$  — координаты  $(0; -3)$ .

Пары чисел  $(3; 0)$  и  $(0; -3)$  являются решениями обоих уравнений системы, а значит, и решениями системы уравнений.

**Ответ:**  $(3; 0)$  и  $(0; -3)$ .

Графический способ решения систем уравнений. Графиком уравнения с двумя переменными называется множество точек координатной плоскости, координаты которых обращают уравнение в верное равенство. Графики уравнений с двумя переменными весьма разнообразны. Например,

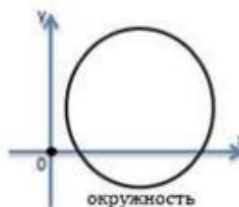
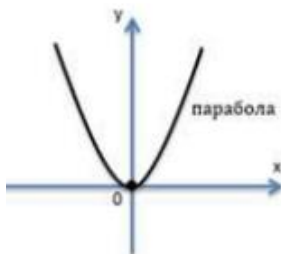
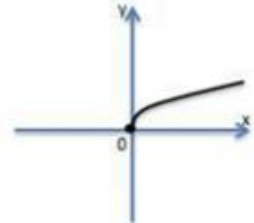
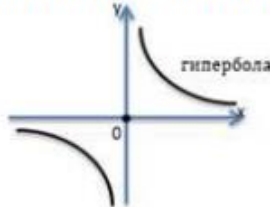
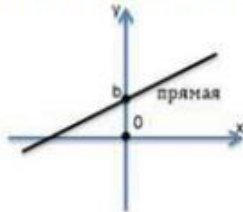
1.  $2x + 3y = 6$ ,  $y = -\frac{2}{3}x + 3$  - прямая

2.  $xy = 5$ ,  $y = \frac{5}{x}$  - гипербола

3.  $y = -x^2 + 2x + 2$  - парабола

4.  $x^2 + y^2 = 4$  - окружность, центр (0;0), радиус - 2

Графиками таких уравнений могут являться различные линии.



Решите систему двух уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-4)^2 + (y-5)^2 = 9 \\ y = x \end{cases} \quad \begin{cases} y + x - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

## Практическая работа №16 «Решение логарифмических уравнений и неравенств»

Задание 1

Вычислить:

1)  $\sqrt{(\sqrt{7} - 2\sqrt{10} + \sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{5}}$ ;      2)  $\sqrt{(\sqrt{16} - 6\sqrt{7} + \sqrt{7}) \cdot 3}$ ;

3)  $\sqrt{(\sqrt{8} + 2\sqrt{15} - \sqrt{8} - 2\sqrt{15}) \cdot 2} + 7$ .

Задание 2

Вычислите:  $\frac{(0,216^{\frac{4}{9}})^{\frac{3}{2}}}{0,09^{\frac{3}{4}} \cdot 0,027^{\frac{1}{6}}}$ .

Задание 3.

Решить уравнения.

1)  $(x-2)(x+3)=0$ ;      2)  $(x-1)\sqrt{x+4}=0$ ;

3)  $\sqrt{(x-2)(x+8)}=0$ ;      4)  $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2x+7}=0$ .

Задание 4.

Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения  $\sqrt{2x^2 - x - 5} + x = 1$ .

Задание 5.

Сколько корней имеет уравнение  $(x^2 - 9)(\sqrt{3 - 2x} - x) = 0$ .

Задание 6.

Решите уравнение  $\sqrt{49 + 9x|x + 4|} - 2x = 7$ .

Задание 7.

Найдите корень уравнения: 1)  $(\frac{1}{4})^{x-3} = 64$ ; 2)  $(\frac{1}{7})^{x-3} = 49$ .

Задание 8. Решите уравнение:  $\log_3(5x - 1) = 2$ .

Задание 9. Решите уравнение:  $\lg(x^2 - 2) = \lg x$ .

Задание 10 Решите уравнение  $\log_6(x - 9)^2 - 2 = 2 \log_6(x - 2)$ ;

### Практическая работа №17 «Подготовка к контрольной работе»

#### Вариант I

1. Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt[4]{\frac{7^8}{0,0625}}$ ; б)  $\sqrt[3]{2^6 \cdot 5^3}$ ; в)  $\sqrt[7]{\frac{2^7 \cdot 3^{21}}{5^{14}}}$ .

2. Вычислите:

а)  $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$ ; б)  $\sqrt[5]{9^5 \cdot 2^3} \cdot \sqrt[3]{2^7}$ .

3. Вычислите:  $\sqrt[3]{7 - \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 + \sqrt{22}}$ .

#### Вариант II

1. Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt[3]{\frac{3^9}{0,125}}$ ; б)  $\sqrt[4]{3^8 \cdot 2^4}$ ; в)  $\sqrt[8]{\frac{2^8 \cdot 3^{24}}{5^{16}}}$ .

2. Вычислите:

а)  $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2}$ ; б)  $\sqrt[6]{2^{11}} \cdot \sqrt[6]{2^7 \cdot 3^{12}}$ .

3. Вычислите:  $\sqrt[4]{10 + \sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10 - \sqrt{19}}$ .

A1. Вычислите: а)  $\log_4 32 + \log_4 \frac{1}{2}$ ; б)  $\log_2 50 - 2 \log_2 5$ ; в)  $3^{\log_3 15 - \log_3 5} + 1$ .

A2. Найдите значения выражения:  $\log_3(9b)$ , если  $\log_3 b = 5$ .

A3. Упростите выражение:  $2^{\log_2 7} + 2 \log_5 15 - \log_5 9$ .

B1. Найдите значение выражения  $\log_{\pi^3} \left( \frac{mn^3}{\pi} \right)$ , если  $\log_{\pi^2} \sqrt{m} = \log_{\pi^2} n = 1$ .

B2. Найдите значение выражения:  $(0,25)^{\lg 2} \cdot (0,04)^{\lg 2} \cdot 10^{\lg 8}$ .

A1. Вычислите: а)  $\log_5 75 + \log_5 (25)^{-1}$ ; б)  $\log_3 9 - \log_9 27$ ; в)  $8^{\log_2 3} - 11$ .

A2. Найдите значение выражения  $\log_2 a^{\frac{1}{3}}$ , если  $\log_4 a^3 = 9$ .

A3. Найдите значение выражения:  $\log_{12} \sqrt{14} \cdot \log_{14} \sqrt{12}$ .

B1. Найдите значение выражения  $\log_{\pi^3} \left( \frac{\pi^2}{a^3 b^2} \right)$ , если  $\log_{\pi^2} \frac{1}{a} = \log_{\pi^5} \frac{1}{b} = 1$ .

B2. Найдите значение выражения:  $36^{0,5 - \log_6 \sqrt{5}} - \frac{4}{15} \log_{0,09} \sqrt{0,027}$ .

### Практическая работа №18 «Применение основных тригонометрических тождеств»

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Вспомним, что квадрат любого числа всегда больше или равен нулю и еще раз внимательно посмотрим на основное тригонометрическое тождество.

Замечаем, что  $\sin^2 \alpha \ll 1$  и  $\cos^2 \alpha \ll 1$

Откуда  $-1 \ll \sin \alpha \ll 1$  и  $-1 \ll \cos \alpha \ll 1$

Найдем  $\sin \beta$  и  $\cos \beta$ , заметим, что  $\sin \alpha = \cos \beta$ ; а  $\cos \alpha = \sin \beta$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$

То есть в прямоугольном треугольнике синус одного острого угла равен косинусу другого (и наоборот).

Заметим, что зная косинус одного угла, можно найти синус (тангенс, котангенс). И наоборот.

$$\cos \alpha = +/\!-\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = +/\!-\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

Знак  $+/-$  зависит от того, какой четверти принадлежит угол  $\alpha$ .

### Задание 1

Отвечаем на вопрос, может ли синус произвольного угла равняться -2; 8; 1; 0,2; 1/8;  $\sqrt{3}/2$

Может ли косинус произвольного угла равняться -6; -0,6; 1/2; 1/14;  $\sqrt{5}/25$

### Задание 2

Может ли синус и косинус одного и того же угла удовлетворять условиям (либо задание может звучать так – существует ли такой угол  $\alpha$ , что его синус и косинус равны соответственно)

$$1) \quad \sin \alpha = \frac{1}{2}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Подставляем значение в основное тригонометрическое тождество, проверяем

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \quad \text{Ответ: ДА(существует)}$$

$$2) \quad \sin \alpha = \frac{1}{4}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Подставляем значение в основное тригонометрическое тождество, проверяем

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{4}$$

Ответ: НЕТ (такого угла  $\alpha$  не существует)

### Задание 3

Найти множество значений функции  $y = 7 \cos \alpha - 3$

Вспоминаем

$$-1 \ll \cos \alpha \ll 1$$

$$-7 \ll 7 \cos \alpha \ll 7$$

$$-7 - 3 \ll 7 \cos \alpha - 3 \ll 7 - 3$$

$$-10 \ll y \ll 4$$

Ответ :  $-10 \ll y \ll 4$

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника – отношение противолежащего катета к прилежащему

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Котангенс острого угла прямоугольного треугольника – отношение прилежащего катета к противолежащему

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Откуда  $\operatorname{tg} \alpha * \operatorname{ctg} \alpha = 1$ , либо, что тоже самое  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$

**Задание 4**

Чему равен тангенс, если котангенс равен -2; -7; 1/3; 15/2?

**Задание 5**

Может ли тангенс угла равняться -4; 6; -3; 0; 1000000?

**Задание 6**

Доказать тождество  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

**Практическая работа №19 «Применение формул двойного и половинного углов»**

**Формулы двойного аргумента**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

**Задание 1**

Найти  $\sin 2\alpha$  и  $\cos 2\alpha$ , если  $5\pi < \alpha < \frac{11\pi}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$

**Задание 2**

Найти  $\sin 2\alpha$ , если  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ,  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$

**Задание 3**

Упростить выражение  $\frac{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$

**Задание 4**

Доказать тождество  $\cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha = \cos 4\alpha$

**Задание 5**

Решить уравнение  $8 \sin 2x \cos 2x = 4$ .

**Формулы половинного аргумента**

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2},$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha},$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Задание 1

Вычислить  $\operatorname{tg} 15^\circ$  без помощи таблиц и микрокалькулятора

Задание 2

Выразить сумму  $S = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$  через  $\cos 4\alpha$

Задание 3

Выполнить понижение степени  $\sin^2 30^\circ$ ,  $\cos^2 27^\circ$ ,  $\operatorname{tg}^2 75^\circ$

Задание 4

Доказать тождество 
$$\frac{1 + \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$$

Задание 5

Решить уравнение  $1 - 2 \sin^2 2x = 0$

**Практическая работа №20 «Применение основных тригонометрических формул для преобразования тригонометрических выражений»**

Задание 1

Упростить выражение  $A = \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\cos \alpha + \sin \alpha}$

Задание 2

Упростить выражение  $\frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - 1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha - 1}$

Задание 3

Упростить выражение  $\cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha$

Задание 4

Упростить выражение  $\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2(-\alpha) - \sin(-\alpha) \cos(-\alpha)} - \operatorname{tg}(-\alpha)$

Задание 5

Упростить выражение  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$

Задание 6

Упростить выражение  $S = \frac{\sin 2\alpha - 2 \cos 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha) \cos^2 \alpha} - \frac{2(\sin \alpha - \cos \alpha)}{\cos 2\alpha}$

Задание 7

Упростить выражение  $\frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1} - \frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1}$

Задание 8

Упростить выражение и найти его числовое значение  $\frac{\sin(\alpha - \pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\alpha - \pi) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$  при

$$\alpha = \frac{5\pi}{4}.$$

### Практическая работа №21 «Решение простейших тригонометрических уравнений»

#### 1. Решите уравнения:

а)  $\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

б)  $\cos(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$

в)  $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

г)  $\cos 3x = -\frac{5}{3}$

д)  $\sin(4x - \frac{\pi}{3}) = 0$

е)  $\operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{6}) = -1$

ж)  $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

з)  $\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 0$

#### 1. Решите уравнения:

а)  $\sin(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

б)  $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

в)  $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

г)  $\cos(\frac{x}{5}) = -\frac{7}{4}$

д)  $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = 0$

е)  $\operatorname{tg}(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{3}) = -1$

ж)  $2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0$

з)  $\sin^2 x + 2\cos x \sin x = 0$

### Практическая работа №22 «Решение тригонометрических уравнений методом приведения к линейному и квадратному уравнению»

#### Задание 1

Привести уравнение к квадратному относительно одной из тригонометрических функций и найти его корни

1)  $\sin^2 x = 1$ ; 2)  $2\cos^2 x = 1$ ; 3)  $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$ ;

4)  $2\sin^2 x + \cos^2 x - 3\sin x - 5 = 0$ ; 5)  $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$

#### Задание 2

Решить уравнение, разложив на множители его левую часть

1)  $\sin x - \sin 3x = 0$ ; 2)  $3\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0$ ; 3)  $\sin 7x - \sin 3x - \cos 5x = 0$

#### Задание 3

Решить однородное уравнение первой степени

1)  $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$ ; 2)  $\sin x - \cos x = 0$ ; 3)  $3\sin x + 2\cos x = 0$ .

#### Задание 4

Решить однородное уравнение второй степени

1)  $\sin^2 x - 3\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 0$ ; 2)  $6\cos^2 x + \sin^2 x - 5\sin x \cos x = 0$ .

#### Задание 5

Решить уравнение

1)  $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x = 3\cos^2 x$ ; 2)  $3\sin x + 4\cos x = 1$ ; 3)  $\sin 2x \cos 4x = \sin 6x \cos 8x$

### Практическая работа №23 «Решение простейших тригонометрических неравенств»

Вариант – 1

$$1. \sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2. \sin x < -1$$

$$3. \cos\left(\frac{x}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$4. \cos 4x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$5. 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) < -\sqrt{2}$$

$$6. 2 \cos x + \sqrt{3} \geq 0$$

$$7. \sin^2(x) + 7 \sin x > 0$$

$$8. \sin\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$9. 4 \sin^2(x) - 4 \cos^2(x) - 1 \geq 0$$

Вариант – 2

$$1. \sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2. \cos x \geq 1$$

$$3. \cos\left(\frac{x}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4. \sin 2x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5. 2 \cos\left(\frac{x}{4}\right) < -\sqrt{3}$$

$$6. 2 \cos x + \sqrt{2} \geq 0$$

$$7. \cos^2(x) - 4 \cos x < 0$$

$$8. \sin^2\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{3x}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$$

$$9. 2 \cos^2(x) + \sqrt{2} \sin(x) > 2$$

**Практическая работа №24 «Повторение пройденного материала»**

Задание 1. Вычислить

$$1) 23,267 : 2,3 - 3,6 \cdot (17,2 \cdot 0,125 + 0,005 : 0,1) + 6,25 \cdot 3,2 ;$$

$$2) 9,25 \cdot 1,04 - (6,372 : 0,6 + 1,125 \cdot 0,8) : 1,2 + 0,16 \cdot 6,25 .$$

Задание 2. Упростить

$$1) 3\sqrt{\frac{5}{9}} - \frac{1}{2}\sqrt{20} + 3\sqrt{180} - 4\sqrt{\frac{125}{4}} ;$$

$$2) \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} .$$

Задание 3. Вычислить



$$1) 8^{\log_2 \frac{1}{3}}; 2) \log_2 \frac{1}{32}; 3) \log_{3\sqrt{2}} \frac{1}{18}; 4) \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{2}} \log_3 9$$

Задание 4. Решить уравнение

$$1) (\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x + 2 = 0; 2) (\log_3 x)^2 + 5 = 2 \log_3 x^3;$$

$$3) \log_2 (2x - 18) + \log_2 (x - 9) = 5$$

Задание 5. Вычислите

$$1) \log_2 \left( \cos \frac{\pi}{3} \right); 2) \log_3 \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \right)$$

Задание 6. Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:

$$1) \frac{\pi}{6}; 2) \frac{\pi}{9}; 3) \frac{3\pi}{4}; 4) 2; 5) 3; 6) 0,36$$

Задание 7. Укажите четверть, в которой лежит угол  $\alpha$ , если  $\alpha = 300^\circ$ .

Задание 8. Найдите значение косинуса угла  $\alpha$ , если известно, что:  $\sin \alpha = -0,6$  и  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Задание 9. Найдите область определения функции  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 2}}{16 - x^2}$ .

Задание 10.

Банковская процентная ставка равна 12% годовых. Какова должна быть первоначальная сумма вклада, чтобы через 2 года его размер составил 56448 рублей.

Задание 11

Сколькими способами можно разместить 6 различных автомобилей в семи одноместных боксах?

## Практическая работа №25 «Функциональные зависимости в реальных процессах»

Ответить на вопросы:

1. Кто из ученых дал определение функции как изменение ординаты точки в зависимости от изменения ее абсциссы?

2. Кто впервые стал употреблять слово "функция"?

3. Кто впервые дал явное определение функции?

4. Кто ввел обозначение функции символом  $f$ ?

5. Охарактеризуйте функциональные зависимости в музыке.

6. В чем заключается математический портрет пословиц? Приведите два конкретных примера.

7. Какие функциональные зависимости встречаются в биологии?

8. Какие функциональные зависимости встречаются в информатике?

### Практическая работа №26 «Исследование функции»

Пример 1. Исследуйте функцию  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$ .

Решение:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = \frac{(x+3)(x-1)}{x-2}$$

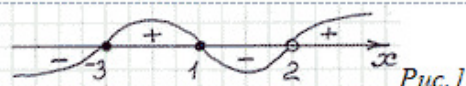
1.  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ ;

2. Вертикальная асимптота  $x=2$ . Проверка: если  $x=2$ , то  $(x+3)(x-1) \neq 0$ .

3. Точки пересечения с осями координат: а)  $f(0) = \frac{(0+3)(0-1)}{0-2} = 1,5$ ; точка  $(0; 1,5)$ ;

б)  $f(x)=0$ , тогда  $(x+3)(x-1)=0$ ,  
 $x=-3$  или  $x=1$ , точки  $(-3; 0)$  и  $(1; 0)$

4. Промежутки знакопостоянства:



5. Исследуем функцию на четность или нечетность:

а)  $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$  — это симметрическое множество;

$$б) f(-x) = \frac{(-x+3)(-x-1)}{-x-2} = \frac{(3-x)(x+1)}{-x-2}$$

так как  $f(-x) \neq f(x)$  и  $f(-x) \neq -f(x)$ , то функция  $f$  не является ни четной, ни нечетной.

6. Степень числителя на единицу больше степени знаменателя, значит, существует наклонная асимптота. Выделим целую часть

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x - 3 : x - 2 \\ x^2 - 2x \quad \quad \quad x + 4 \\ \hline 4x - 3 \\ 4x - 8 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{x-2} = x + 4 + \frac{5}{x-2}$$

$$(x \rightarrow \pm\infty) \Rightarrow \left(\frac{5}{x-2} \rightarrow 0\right) \Rightarrow f(x) \rightarrow x + 4 \Rightarrow (f(x) - (x + 4)) \rightarrow 0,$$

значит, по определению  $y = x + 4$  — наклонная асимптота.

Так как  $f(x) = x + 4 + \frac{5}{x-2}$ , где  $\frac{5}{x-2} \neq 0$ , значит, график не пересекает наклонную асимптоту.

7. Области существования графика:

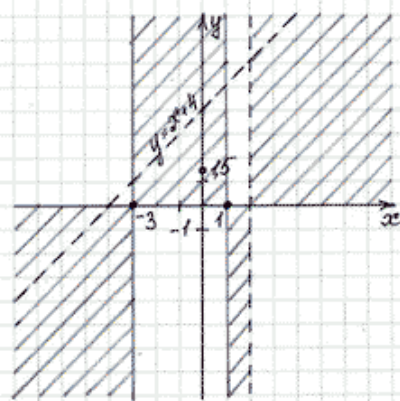


Рис.2

8.  $E(f): y = f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$ . Пусть  $y$  – параметр, выясним возможность корней  $y$  параметрического уравнения

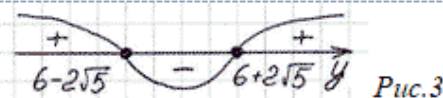
$$yx - 2y = x^2 + 2x - 3$$

$$x^2 + (2 - y)x + (2y - 3) = 0, y \neq 0,$$

$$D = (2 - y)^2 - 4(2y - 3) = 4 - 4y + y^2 - 8y + 12 = y^2 - 12y + 16 \geq 0$$

$$y^2 - 12y + 16 = 0, D = 36 - 16 = 20$$

$$y = 6 \pm \sqrt{20} = 6 \pm 2\sqrt{5}$$



$$E(f) = (-\infty; 6 - 2\sqrt{5}] \cup [6 + 2\sqrt{5}; +\infty).$$

9. Так как  $E(f) = (-\infty; 6 - 2\sqrt{5}] \cup [6 + 2\sqrt{5}; +\infty) \Rightarrow y_1 = 6 - 2\sqrt{5}$  и  $y_2 = 6 + 2\sqrt{5}$  являются значениями минимума и максимума функции. Найдем абсциссы точек

$$\text{для функции } g(x) = x^2 + (2 - y)x + (2y - 3) \quad x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-(2 - y)}{2} = \frac{y - 2}{2},$$

$$\text{если } y_1 = 6 - 2\sqrt{5}, \text{ то } x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{5} - 2}{2} = \frac{2(2 - \sqrt{5})}{2} = 2 - \sqrt{5},$$

$$\text{если } y_2 = 6 + 2\sqrt{5}, \text{ то } x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{5} - 2}{2} = \frac{2(2 + \sqrt{5})}{2} = 2 + \sqrt{5}.$$

Учитывая множество значений функции, определяем, какая из точек является точкой минимума, а какая – точкой максимума:  $x_{\min} = 2 + \sqrt{5}$ ,  $x_{\max} = 2 - \sqrt{5}$ .

$$\min_{D(f)} f(x) = f(2 + \sqrt{5}) = 6 + 2\sqrt{5}; \quad \max_{D(f)} f(x) = f(2 - \sqrt{5}) = 6 - 2\sqrt{5}.$$

10. Из эскиза графика следует, что функция  $f(x)$  возрастает в промежутках  $(-\infty; 2 - \sqrt{5}]$  и  $[2 + \sqrt{5}; +\infty)$ ; убывает в промежутках  $[2 - \sqrt{5}; 2)$  и  $(2; 2 + \sqrt{5}]$ .

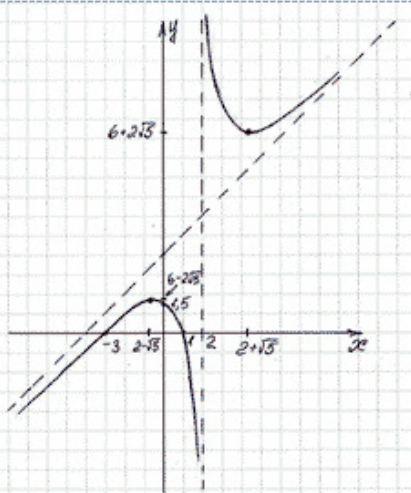
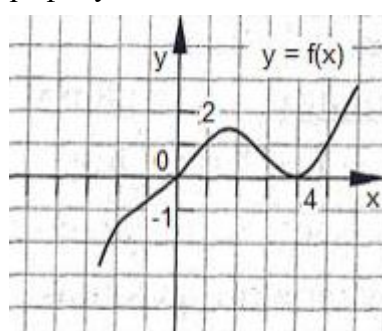
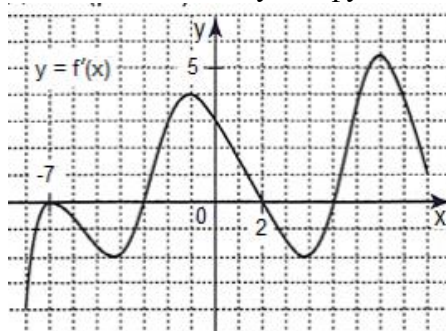


Рис.4

Задание 1. Исследуйте функцию по графику



Задание 2. Исследуйте функцию.

$$1) y = \sin 2x; \quad 2) f(x) = 5x^4 - 6x^2 - 3$$

Задание 3. Найти интервалы монотонности функций: 1)  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ ; 2)  $f(x) = 3 + 24x - 3x^2 - x^3$ ;

### **Практическая работа №27 «Размещения, сочетания, перестановки»**

Задача 1.

Сколько четырехзначных «слов» можно составить из карточек **в, е, ч, н, о, с, т, ь**?

Задача 2.

Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все цифры нечетные?

Задача 3.

Несколько строк в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде четырех по цвету: белый, синий, красный, зеленый. Сколько всего стран могут использовать такую символику?

Задача 4.

Из цифр 1,2,3,5 составили все возможные четырехзначные числа (без повторений цифр). Сколько среди них таких чисел, которые больше 2000, но меньше 5000?

Задача 5.

Сколько существует способов занять 1-ое, 2-ое, 3-е места на чемпионате по футболу, в котором участвуют 10 команд?

Задача 6.

Сколькими способами можно делегировать троих студентов на международную конференцию из 9 членов научного общества?

### **Практическая работа №28 «Решение практических задач с использованием правил перестановки и размещения комбинаторики»**

Задача 1. У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

Задача 2. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

Задача 3. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

Задача 4. В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек?

Задача 5. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.

Задача 6. Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

### **Практическая работа №29 «Решение практических задач с применением правил размещения и сочетания»**

Задача 1.

В классе 25 учеников. Сколькими способами можно из них выбрать 4 учащихся для дежурства?

Задача 2.

Сколько вариантов трехзначного цифрового кода существует?

Задача 3.

В контексте 2 буквы белого цвета, 2 буквы синего цвета и 1 буква желтого цвета. Сколькими способами можно выбрать 3 буквы (порядок выбора не важен)?

Задача 4.

Сколькими способами можно составить букет из 7 цветов, если в вашем распоряжении 15 цветов?

Задача 5.

Сколькими способами можно составить список из 6 фильмов?

Задача 6.

На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в различном порядке?

**Практическая работа №30** «Решение задач комбинаторики, применяя бином Ньютона и треугольник Паскаля»

1. Сколько членов разложения бинома  $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[3]{7})^{36}$  являются целыми числами?
2. Вычислить сумму  $C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2 C_5^2 + 2^3 C_5^3 + 2^4 C_5^4 + 2^5 C_5^5$ .
3. Найти алгебраическую сумму коэффициентов многочлена относительно  $x$ , получаемого в разложении бинома  $(3x - 4)^{17}$ .

**Практическая работа №31.** «Решение задач с применением свойств вероятностей»

Задание 1

В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Задание 2

В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Задание 3

Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них – ноль, а другая – нечётная. Найти вероятность того, что он наберёт правильный номер.

Задание 4

Абонент забыл пин-код к своей сим-карте, однако помнит, что он содержит три «пятёрки», а одна из цифр – то ли «семёрка», то ли «восемёрка». Какова вероятность успешной авторизации с первой попытки?

Задание 5

Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадет: а) пять очков; б) не более четырёх очков; в) от 3 до 9 очков включительно.

Задание 6

В лифт 20-этажного дома на первом этаже зашли 3 человека. И поехали. Найти вероятность того, что: а) они выйдут на разных этажах б) двое выйдут на одном этаже; в) все выйдут на одном этаже.

Задание 7

Какова вероятность того, что в четырех сданных картах будет один туз и один король?

Задание 8

В ящике находится 15 качественных и 5 бракованных деталей. Наудачу извлекаются 2 детали. Найти вероятность того, что: а) обе детали будут качественными;

б) одна деталь будет качественной, а одна – бракованной; в) обе детали бракованные.

Задание 9

Игроку в покер сдаётся 5 карт. Найти вероятность того, что он получит: а) пару десятков и пару валетов; б) флеш (5 карт одной масти); в) каре (4 карты одного номинала). Какую из перечисленных комбинаций вероятнее всего получить?

### Практическая работа №32 «Меры разброса случайной величины»

Задание 1 Найти моду, медиану и среднее значение выборки:

1. 13, 10, 15, 18, 21, 22, 10, 16, 10

2. 7, 8, 2, 5, 6, 9, 5, 6, 2, 1, 3, 8

3.

|   |   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|---|----|
| X | 5 | 6 | 1 | 9 | 12 |
| M | 3 | 1 | 4 | 2 | 1  |

Задание 2. Найти среднее арифметическое и математическое ожидание значений случайной величины X:

|   |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|
| X | 11 | 10 | 15 | 14 | 16 | 12 | 20 |
| M | 2  | 5  | 6  | 1  | 3  | 2  | 1  |

Задание 3. Найти размах дисперсию и среднее квадратичное отклонение:

а) 2, 5, 8, 4, 12, 6, 2, 8, 1

б) -10, -5, 0, 2, 5, 7, 8, 9, 11, 15

Задание 4. Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение:

|   |   |   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|---|---|----|
| X | 0 | 2 | 5 | 6 | 8 | 10 |
| M | 7 | 8 | 4 | 2 | 1 | 3  |

### Практическая работа №33. «Решение практических задач на обработку числовых данных»

Задание 1

Найдем математическое ожидание случайной величины X – числа стандартных деталей среди трех, отобранных из партии в 10 деталей, среди которых 2 бракованных. Составим ряд распределения для X. Из условия задачи следует, что X может принимать значения 1, 2, 3.

Задание 2

Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

|   |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|
| X | 40  | 42  | 41  | 44  |
| p | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,4 |

Найдите: 1) математическое ожидание; 2) дисперсию; 3) среднее квадратическое отклонение.

Задание 3

Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по известному закону ее распределения, заданному таблично:

|   |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|
| X | 8   | 4   | 6   | 5   |
| P | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 |

Задание 4



Непрерывная случайная величина  $X$  задана интегральной функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x^3 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти: 1) дифференциальную функцию распределения  $f(x)$ ; 2) математическое ожидание  $M(x)$ ; 3) дисперсию  $D(x)$ .

*Задание 5*

Рабочий обслуживает три станка. Известно, что вероятность бесперебойной работы на протяжении одного часа после наладки равна для первого станка 0,9, для второго станка – 0,8 и для третьего станка – 0,7. Найти вероятность того, что за этот час лишь один станок откажет в работе и потребует вмешательства рабочего.

*Задание 6*

Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что число попаданий при 600 выстрелах будет заключено в пределах от 330 до 375.

*Задание 7*

Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины  $X$  по известному закону ее распределения, заданному таблично:

|   |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|
| X | 8   | 4   | 6   | 5   |
| P | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 |

### **Практическая работа №34 «Арифметическая и геометрическая прогрессия»**

Задание 1. Дана арифметическая прогрессия  $a_n$  :  $a_1 = 10$ ,  $d = 4$ . Найти  $a_2$ ,  $a_4$

Задание 2. Найти суммы  $S_n$  для арифметических прогрессий  $a_n$  ,  $a_1 = 2$ ,  $d = 1$ ,  $n = 10$

Задание 3. Между числами 7 и 35 вставьте шесть таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

Задание 4. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если:

$$\begin{cases} a_1 + a_7 = 42 \\ a_{10} - a_3 = 21 \end{cases}; 2) \begin{cases} a_1 + a_5 = 24 \\ a_2 \cdot a_3 = 60 \end{cases}$$

Задание 5. Дана арифметическая прогрессия:  $-10$ ;  $-5$ ;  $0$ ;  $5$ ...; известна сумма первых  $n$  членов  $S_n = 585$ . Найти  $n$ .

Задание 6. Дана геометрическая прогрессия  $b_n$  :  $b_1 = 2$ ,  $q = 2$ . Найти  $b_4$ ,  $b_6$ ,  $b_8$

Задание 7. Дана геометрическая прогрессия с положительными членами  $b_n$  . Найти  $b_5$ ,

$$\begin{cases} b_4 - b_2 = 6 \\ b_1 + b_2 = 16 \end{cases}$$

если

Задание 8. Найти первые пять членов геометрической прогрессии  $b_n$  :  $b_1 = 4$ ,  $q = 2$ .

### **Практическая работа №35. «Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии»**

*Задание 1*

Представить в виде обыкновенной дроби число  $0,(6)$ .

*Задание 2*

Дана последовательность  $C_n = 5(-2)^n$  . Докажите, что эта последовательность является геометрической прогрессией.

*Задание 3*

Дана геометрическая прогрессия  $b_n = 2(-3)^n$  1. Найдите пятый член прогрессии.

*Задание 4*

Найдите сумму первых восьми членов прогрессии.

### Задание 5

Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии  $8; 2; 0,5; \dots$

### Задание 6

Дана геометрическая прогрессия  $C_n$  с положительными членами, в которой  $C_4=24; C_6=96$ .

а) Найдите  $C_1$ . б) Определите количество членов прогрессии, начиная с первого, сумма которых равна 45.

### Задание 6

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 150. Найти  $b_1$ , если  $q = \frac{1}{3}$

### Задание 7

Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии  $b_n$  в три раза больше ее первого члена. Найдите отношение  $b_2/b_4$ .

**Практическая работа №36** «Использование прогрессии для решения реальных задач прикладного характера»

**Задача о делении хлеба.** Сто мер хлеба разделить между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвертый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше трех остальных. Сколько нужно дать каждому?

**Решение:**

Очевидно, количества хлеба, полученные участниками раздела, составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Пусть первый ее член  $x$ , разность  $y$ . Тогда доля первого  $x$ , доля второго  $x + y$ , доля третьего  $x + 2y$ , доля четвертого  $x + 3y$ , доля пятого  $x + 4y$ .

На основании условий задачи составляем следующие два уравнения:

$$\begin{cases} x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y) = 100, \\ 7[x + (x + y)] = (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y). \end{cases}$$

После упрощений система принимает вид

$$\begin{cases} x + 2y = 20, \\ 11x = 2y. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем:  $x = \frac{5}{3}, y = \frac{55}{6}$ . Значит, хлеб должен быть разделен на следующие части  $1\frac{2}{3}, 10\frac{5}{6}, 20, 29\frac{1}{6}, 38\frac{1}{3}$ .



Уже в Древнем Египте знали не только арифметическую, но и геометрическую прогрессию. Вот, например, задача из папируса Райнда: «У семи лиц по семи кошек;

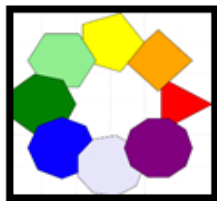
каждая кошка съедает по семи мышей, каждая мышь съедает по семи колосьев, из каждого колоса может вырасти по семь мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?»

**Решение:** числа 7, 49, 343, 2401, 16807, 117649 представляют геометрическую прогрессию, первый член  $b_1 = 7$  и знаменатель прогрессии  $q = 7$ . Тогда, используя формулу  $n$ -го члена прогрессии  $b_n = b_1 q^{n-1}$ , находим  $b_6 = 7 \cdot 7^{6-1} = 7 \cdot 7^5 = 7^6 = 117649$ . По формуле суммы  $n$ -первых членов геометрической прогрессии:  $S_n = (b_1(q^n - 1))/(q - 1)$ , находим  $S_6 = \frac{7(7^6 - 1)}{7 - 1} = \frac{7((117649 - 1))}{6} = 137256$



## 2. Прогрессия в математике

**Задача №1.** Числа градусов, содержащихся в последовательных внутренних углах некоторого многоугольника, составляют прогрессию, разность которой 10; наименьший угол этого многоугольника  $100^\circ$ . Сколько в многоугольнике сторон?



Решение.  $S_n = (2a_1 + d(n-1)) \cdot n : 2 = (200 + 10(n-1)) \cdot n : 2 = 5n^2 + 95n$ . Сумма внутренних углов многоугольника находится по формуле, известной из геометрии:  $(n-2) \cdot 180$ .

$$5n^2 + 95n = 180n - 360;$$

$$5n^2 - 85n + 360 = 0;$$

$$n^2 - 17n + 72 = 0;$$

$$n = 8, \quad n = 9.$$

Существует два многоугольника, удовлетворяющих условию задачи: восьмиугольник и девятиугольник

## Прогрессии в биологии

**Задача №2.** Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т.д. Найдите число бактерий, образующихся из одной бактерии к концу суток.

**Решение.** В сутках 1440 минут, каждые двадцать минут появляется новое поколение - за сутки 72 поколения. По формуле суммы  $n$  первых членов геометрической прогрессии, у которой  $b_1 = 1$ ,  $q = 2$ ,  $n = 72$ , находим, что  $S_{72} = 2^{72} - 1 = 4\,722\,366\,482\,869\,645\,213\,696 - 1 = 4\,722\,366\,482\,869\,645\,213\,695$  (бакт).

**Практическая работа №37.** «Применение таблицы производных элементарных функций»

Задание Вычислить производную функции:

1.  $x^7 + 5x^6 + 24x^2 - 7$
2.  $7x^4 - \sqrt[3]{x^2}$
3.  $\frac{2}{\sqrt[5]{x^7}} - 4x^8$
4.  $(5x^2 - 3x)^4$
5.  $(7x + 4)^3 \cdot (8 - 6x)^5$
6.  $12x^4 - 5x^7 + 8 - 3x$
7.  $12x^3 - \sqrt[5]{x^4}$
8.  $12x^3 + \frac{4}{\sqrt[7]{x^3}}$
9.  $(4x^3 - 12)^5$
10.  $(12 - 7x)^3 \cdot (x^3 - 2x)^4$

**Практическая работа №38** «Связь производной и промежутков возрастания и убывания функции»

Задание 1. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-0, 5; 4, 3)$ . Определите количество целых точек (у которых координата – целое число), в которых производная функции положительна, отрицательна. (рисунок 1)

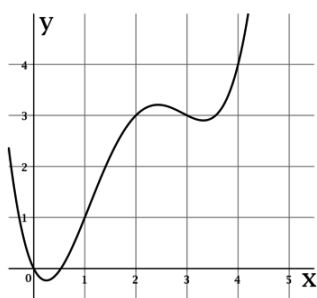


Рис.1

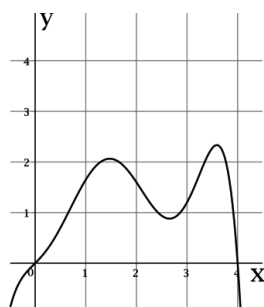


Рис.2.

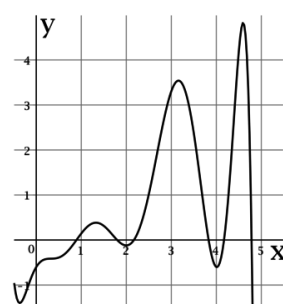


Рис.3

Задание 2. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-0, 5; 4, 1)$ . Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

Задание 3. На рисунке изображен график  $y = f'(x)$  — производной функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-0, 6; 4, 8)$ . Найдите промежутки возрастания функции  $y = f(x)$ . В ответе укажите произведение целых точек, входящих в эти промежутки.

### Практическая работа №39. «Проведение с помощью производной исследования функции»

#### Задание 1

С помощью производной найдите промежутки возрастания и убывания функции:  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$ .

#### Задание 2

Исследуйте функцию и постройте её график:  $f(x) = -0,5x^2 + 2x + 6$ .

#### Задание 3

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$  на промежутке  $[-3; 2]$ .

#### Задание 4

С помощью производной найдите промежутки возрастания и убывания функции:  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$ .

#### Задание 5

Исследуйте функцию и постройте её график:  $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ .

#### Задание 6

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$  на отрезке  $[-2; 1]$ .

#### Задание 7

С помощью производной найдите промежутки возрастания и убывания функции:  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ .

#### Задание 8

Исследуйте функцию и постройте её график:  $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ .

#### Задание 9

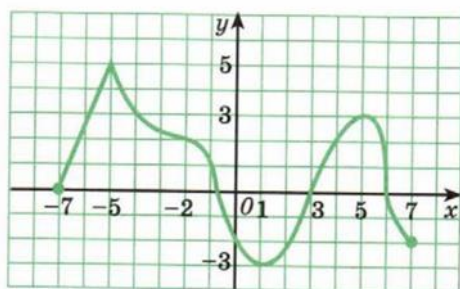
Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$  на промежутке  $[-4; 3]$ .

### Практическая работа №40 «Наибольшее и наименьшее значение функции»

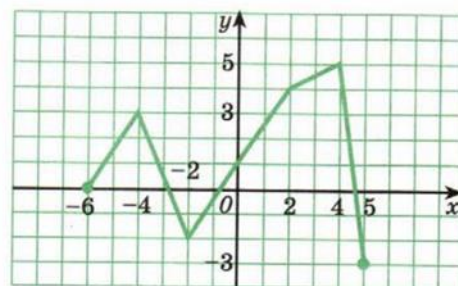
#### Задание 1

Для функций, графики которых изображены на рисунке, а-г найдите:

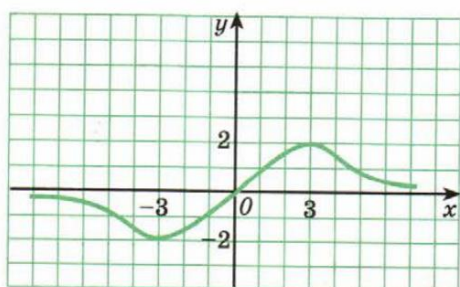
- 1) точки максимума и минимума функции; 2) экстремумы функции.



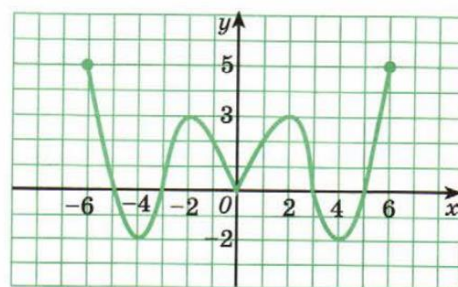
а)



б)



в)



г)

### Задание 2

Начертите эскиз графика функции

- 1)  $x_{\max} = -3$ ,  $x_{\min} = 4$ ,  $f(-3) = 5$ ,  $f(4) = -5$ ; 2)  $x_{\min} = -5$ ,  $x_{\max} = 2$ ,  $f(-5) = 1$ ,  $f(2) = 6$ ;
- 3)  $f$  – четная,  $x_{\max} = -3$ ,  $x_{\min} = 0$ ,  $f(-3) = 4$ ,  $f(0) = 0$ ;
- 4)  $f$  – нечетная,  $x_{\max} = 2$ ,  $x_{\min} = 5$ ,  $f(2) = 3$ ,  $f(5) = -4$ .

### Задание 3

Найдите точки максимума и минимума функции ее максимумы и минимумы

- 1)  $y = -x^2 + 6x - 8$ ; 2)  $y = \frac{3}{x-2}$ ; 3)  $y = \frac{3}{x+1} - 1$ ;
- 4)  $y = -(x+3)^5$ , 5)  $y = 3 \sin x - 1$ ; 6)  $y = 1 + 2 \lg x$ .

### Задание 4

Найдите точки экстремума функции и экстремумы функции

- 1)  $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$ ; 2)  $y = 4|x| - x^2$ ; 3)  $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ; 4)  $y = 1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ .

### Задание 5

Докажите следующие утверждения:

- 1) если  $f$  – четная функция,  $x_0$  – точка максимума, то  $-x_0$  является точкой максимума;
- 2) 2) если  $f$  – нечетная функция на промежутке,  $x_0$  – точка минимума, то  $-x_0$  является точкой максимума.

## Практическая работа №41 «Вторая производная функций»

1836. Найти ускорение тела, движущегося по закону  $s(t) = 2t^3 + 5t^2 + 4t$  ( $s$  — путь в метрах,  $t$  — время в минутах), в момент времени: а)  $t = 40$  сек; б)  $t = 1$  ч.

1837. Найти ускорение тела, движущегося по закону  $s = \sqrt{t}$  ( $s$  — путь в метрах,  $t$  — время в минутах), в произвольный момент времени  $t$ .

Для данных функций найти производные всех порядков (1838—1843):

1838.  $y = (x + 2)^3$ .      1840.  $y = x^2 - x - 1$ .      1842.  $y = \cos x$ .

1839.  $y = (2x - 1)^3$ .      1841.  $y = x^5 + 4x^3 - 7x^2$       1843.  $y = (1 + x)^{100}$ .

1844. Доказать, что для функции  $y = a \sin x + b \cos x$  справедливо соотношение  $y^{IV} = y$ .

1845. Сколько раз нужно продифференцировать функцию  $y = (x^2 + 1)^{100}$ , чтобы в результате получился многочлен 50-й степени?

1846\*. Найти производную 100-го порядка от функции  $y = \sin x \cos^2 x$ .

### ОТВЕТЫ

1836. а)  $18 \text{ м/мин}^2$ ; б)  $730 \text{ м/мин}^2$ . 1837.  $-\frac{1}{4t\sqrt{t}}$ .  
 1838.  $y' = 3(x + 2)^2$ ;  $y'' = 6(x + 2)$ ;  $y''' = 6$ ;  $y^{IV} = y^V = \dots = 0$ . 1839.  $y' = 6(2x - 1)^2$ ;  $y'' = 24(2x - 1)$ ;  $y''' = 48$ ;  $y^{IV} = y^V = \dots = 0$ . 1842.  $y' = -\sin x$ ;  $y'' = -\cos x$ ;  $y''' = \sin x$ ;  $y^{IV} = \cos x$  и далее все повторяется. 1845. 150 раз.  
 1846.  $\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4} \cos x + \frac{3^{100}}{4} \sin 3x$ .

### Практическая работа №42 «Выпуклость графика функции, точки перегиба»

Задание 1. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вмятины графиков функций.  $y = 2x^3 - x^4 + 36x^2 - 100$ .  $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 2x - 1$ .  $y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^5}$ .

Задание 2. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вмятины графиков функций.  $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 2x - 1$ .

Задание 3. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вмятины графиков функций  $y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^5}$ .

### Практическая работа №43 «Применение производной к построению графиков функций»

Задание 1

С помощью производной найдите промежутки возрастания и убывания функции:  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$ .

Задание 2

Исследуйте функцию и постройте её график:  $f(x) = -0,5x^2 + 2x + 6$ .

Задание 3

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$  на промежутке  $[-3; 2]$ .

Задание 4

С помощью производной найдите промежутки возрастания и убывания функции:  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$ .

Задание 5

Исследуйте функцию и постройте её график:  $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ .

Задание 6

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$  на отрезке  $[-2; 1]$ .

**Задание 7**

С помощью производной найдите промежутки возрастания и убывания функции:  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ .

**Задание 8**

Исследуйте функцию и постройте её график:  $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ .

**Задание 9**

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$  на промежутке  $[-4; 3]$ .

**Практическая работа №44 «Использование геометрического и физического смысла производной для решения задач»**

**Связь производной с физическими величинами.**

| Связь производной с физическими величинами | Описание величин                                                    | Физическая формула   |
|--------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|----------------------|
| $v = S'(t)$                                | $v$ – скорость<br>$S$ – перемещение                                 | $v = \frac{S}{t}$    |
| $a = v'(t)$                                | $a$ – ускорение<br>$v$ – скорость                                   | $a = \frac{v}{t}$    |
| $I = q'(t)$                                | $I$ – сила тока<br>$q$ – электрический заряд                        | $I = \frac{q}{t}$    |
| $\rho = m'(l)$                             | $\rho$ – линейная плотность<br>$m$ – масса тела<br>$l$ – длина тела | $\rho = \frac{m}{l}$ |
| $\rho = m'(V)$                             | $\rho$ – объемная плотность<br>$m$ – масса тела<br>$V$ – объем      | $\rho = \frac{m}{V}$ |

№1. Найти кинетическую энергию тела, которое движется прямолинейно по закону  $S = 1 - t + t^2$  ( $S$  – измеряется в метрах, а  $t$  – в секундах), через 10 с. после начала движения. Масса тела составляет 5 кг.

№2. В тонком неоднородном стержне длиной 25 см., масса которого (в г) распределена по закону  $m = 2l^2 + 3l$ , где  $l$  – длина стержня, отсчитываемая от его начала, найти линейную плотность в точке:

- 1) отстоящей от начала стержня на 3 см.;
- 2) в конце стержня.

№3. Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента  $t = 0$  с, задается формулой  $q = 3t^2 + t + 2$ . Найдите силу тока в момент времени  $t = 3$  с.

№4. В какой момент времени скорость точки, которая движется прямолинейно по закону  $x(t) = 5t^2 + 3t - 12$ ,  $x(t)$  – перемещение в сантиметрах,  $t$  – время в секундах), будет равна 33 см/с.?

**Практическая работа №45 «Подготовка к контрольной работе»**

- 1 Найти интервалы возрастания и убывания функции  
 $y = 6x - 2x^3$ .
- 2 Найти точки экстремума функции  $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ .
- 3 Построить график функции:  
 1)  $y = 2x^4 - x^2 + 1$ ;      2)  $y = x^3 - 3x$ .
- 4 Функция  $y = x + \frac{4}{x}$  непрерывна на отрезке  $[1; 5]$ . Найти её наибольшее и наименьшее значения.
- 5 Периметр основания прямоугольного параллелепипеда 8 м, а высота 3 м. Какой длины должны быть стороны основания, чтобы объём параллелепипеда был наибольшим?
- '1 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:  
 1)  $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$  на отрезке  $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$ ;  
 2)  $f(x) = 2 \cos x + \sin 2x$  на отрезке  $[0; \pi]$ .
- '2 Из всех прямоугольных треугольников, у которых сумма одного катета и гипотенузы равна  $l$ , найти треугольник с наибольшей площадью.
- '3 Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 40. Какую длину должны иметь катеты, чтобы площадь треугольника была наибольшей?
- '4 Сумма диагоналей параллелограмма равна  $a$ . Найти наименьшее значение суммы квадратов всех его сторон.
- '5 Найти точки перегиба функции:  
 1)  $f(x) = 6x^2 - x^3$ ;      2)  $f(x) = 3x^2 + 4x^3$ .
- '6 Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг радиуса  $R$  так, что одна сторона прямоугольника лежит на диаметре полукруга, выбран тот, у которого наибольшая площадь. Найти эту площадь.

**Практическая работа №46.** «Вычисление первообразной для функции»

*Задание*

Найдите первообразную

1.  $f(x) = 6x - 9 + 3x^5 - \frac{3}{\sqrt{x}}$

2.  $f(x) = 5 \cos(4x - 2) + 5x$

3.  $f(x) = \frac{3}{4 \sin^2(5 - 2x)}$

4.  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x + 3}} - \frac{4}{x^5}$

5.  $f(x) = \frac{3}{(5-7x)^4}$
6.  $f(x) = 5e^{2x+3} + 4x^2$
7.  $f(x) = \frac{4}{x} + 5^x$
8.  $f(x) = \frac{3}{2x-5} - 4$
9.  $f(x) = 3^{4x-5} + 8e^{\frac{x}{5}+3}$

#### Практическая работа №47 «Решение задач на связь первообразной и ее производной»

*Задание*

Найдите первообразную

- $f(x) = 6x - 9 + 3x^5 - \frac{3}{\sqrt{x}}$
- $f(x) = 5\cos(4x-2) + 5x$
- $f(x) = \frac{3}{4\sin^2(5-2x)}$
- $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+3}} - \frac{4}{x^5}$
- $f(x) = \frac{3}{(5-7x)^4}$
- $f(x) = 5e^{2x+3} + 4x^2$
- $f(x) = \frac{4}{x} + 5^x$
- $f(x) = \frac{3}{2x-5} - 4$
- $f(x) = 3^{4x-5} + 8e^{\frac{x}{5}+3}$

#### Практическая работа №48. «Применение интеграла для вычисления площадей»

*Задание 1*

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y=2x$ ,  $y=3x$  и прямой  $x=1$ .

*Задание 2*

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y=\sin x$ ,  $y=\cos x$  и прямыми  $x=0$ ,  $x=1/2$ .

*Задание 3*

Фигура ограничена графиками функции  $y = 3 - \sqrt{x}$  и прямыми  $x=1$ ,  $y=0$ . Прямая  $y=4$  делит фигуру на две части. Равны ли их площади?

*Задание 4*

Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y=x^2+2x$ , касательной к графику в точке с абсциссой  $x_0=1$  и осью  $OY$ .

#### Практическая работа №49 «Применение интеграла для вычисления физических

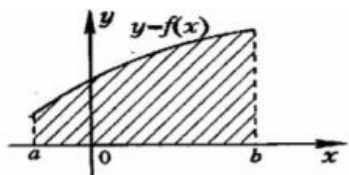


величин»

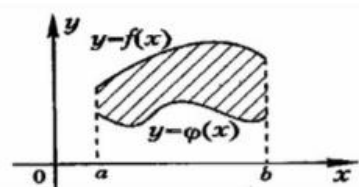
1. Скорость движения тела задана уравнением  $v = t^2 - t + 3$ . Найти уравнение движения, если в начальный момент времени  $s_0 = 3$  м.
2. Найти уравнение движения точки, если к моменту начала отсчета она прошла путь  $s_0 = 4$  м, а его скорость задана уравнением  $v = t^2 - 6t + 7$ .
3. Скорость движения тела пропорциональна квадрату времени. Найти уравнение движения тела, если известно, что за 3 с оно прошло 18 м.
4. Тело движется прямолинейно со скоростью  $v(t) = (3 + 3t^2)$  м/с. Найти путь, пройденный телом за 5 с от начала движения.
5. Скорость движения тела изменяется по закону  $v(t) = (3t^2 + t + 1)$  м/с. Найти путь, пройденный телом за 4 с от начала движения.
6. Найти путь пройденный телом за 10-ю секунду, зная, что что скорость его прямолинейного движения выражается формулой  $v = t^2 + 4t - 2$  м/с.
7. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, если скорость ее прямолинейного движения изменяется по закону  $v = (15t - 5t^2)$  м/с.
8. Какую работу совершает сила в 8 Н при растяжении пружины на 6 см?
9. Сила в 40 Н растягивает пружину на 0,04 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 0,02 м?
10. Вычислить силу давления воды на вертикальную прямоугольную пластинку, основание которой 30 м, а высота 10 м, причем верхний конец пластинки совпадает с уровнем воды.
11. Вычислить силу давления воды на одну из стенок аквариума, имеющего длину 30 см и высоту 20 см.

### Практическая работа №50 «Применение производной и интеграла к решению практических задач»

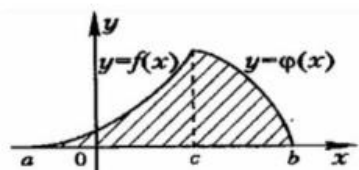
Вычислите площадь криволинейных фигур



$$S = \int_a^b f(x) dx$$



$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx$$



$$S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx$$

### Практическая работа №51 «Метод разложения на множители»

Задание 1



Решить уравнение  $\sqrt{x^2 - 5x + 1} = \sqrt{x - 4}$

Задание 2

Решить уравнение  $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$

Задание 3

Решить уравнение  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

Задание 4

Решить уравнение  $\sin 2x = 0$

## Практическая работа №52 «Метод введения новой переменной для решения уравнений»

Решите уравнения, систему уравнений методом введения новой переменной.

$$\begin{cases} \frac{5}{3x-y} + \frac{3}{x-3y} = -2 \\ \frac{15}{3x-y} + \frac{2}{x-3y} = 1 \end{cases}$$

Несложно заметить в обоих уравнениях системы одинаковые выражения. Поэтому первым действием вводим новые переменные:

Получена простейшая линейная система, которую можем решить любым из ранее рассмотренных способов. Решим с помощью метода подстановки. Выразим  $a$  в первом уравнении и подставим во второе:

$$\begin{cases} \frac{5}{3x-y} + \frac{3}{x-3y} = -2 \\ \frac{15}{3x-y} + \frac{2}{x-3y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = -2 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3b - 2 \\ -7b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3b - 2 \\ -7b = 7 \end{cases}$$

Теперь необходимо вернуться к исходным переменным:

$$\begin{cases} \frac{5}{3x-y} = 1 \\ \frac{1}{x-3y} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y = 5 \neq 0 \\ x-3y = -1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y = 5 \\ x-3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(3y-1) - y = 5 \\ x = 3y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y-3-y = 5 \\ x = 3y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y = 8 \\ x = 3y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ответ: (2;1)

Задание 2. Решить систему методом введения новых переменных:

$$\begin{cases} \cos x + \cos 2y = -0,5 \\ 3 \cos 2y - \cos x = 2,5 \end{cases}$$

Вводим и изучаем новые переменные:

$$\cos x = a \in [-1; 1]; \cos 2y = b \in [-1; 1];$$

Производим замену:

$$\begin{cases} \cos x + \cos 2y = -0,5 \\ 3 \cos 2y - \cos x = 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -0,5 \\ 3b - a = 2,5 \end{cases}$$

Полученную систему можно решать различными способами, мы применим метод алгебраического сложения:

$$\begin{cases} a + b = -0,5 \\ 3b - a = 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow 4b = 2 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

Подставим найденное значение в первое уравнение и найдем а:

$$a + b = -0,5 \Leftrightarrow a + 0,5 = -0,5 \Leftrightarrow a = -1$$

Найденные значения удовлетворяют ОДЗ. Переходим к исходным переменным:

$$\begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 2y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2y = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ y = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + \pi k), (\pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + \pi k), k, n \in \mathbb{Z}$$

Обратим внимание, что здесь n и k никак не связаны между собой и при нахождении значений x и y нужно ставить разные целочисленные переменные.

$$\begin{cases} \lg x - \lg y = 1 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5 \end{cases}$$

Очевидна замена:

$$\begin{cases} \lg x = a \\ \lg y = b \end{cases}$$

Не забываем про ОДЗ:  $x > 0, y > 0$

Преобразуем:

$$\begin{cases} \lg x - \lg y = 1 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

Решим полученную систему методом подстановки, выразим в первом уравнении  $a$  и подставим во второе уравнение:

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ (b + 1)^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ b^2 + 2b + 1 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ 2b^2 + 2b - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ b^2 + b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ b = -2 \\ a = b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Вернемся к исходным переменным:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = -1 \\ \lg y = -2 \\ \lg x = 2 \\ \lg y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,1 \\ y = 0,01 \\ x = 100 \\ y = 10 \end{cases}$$

Ответ: (0,1;0,01), (100;10)

$$(3x - 14)^2 - 4(3x - 14) + 3 = 0$$

$$(2x - 21)^2 - 5(2x - 21) + 4 = 0.$$

Обозначаем  $2x - 21 = y$ . Получается простое квадратное уравнение:

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \text{ по теореме Виета;}$$

$$y_1 = 4, \quad y_2 = 1.$$

Возвращаемся к обозначенному:

$$\begin{aligned} 1) \quad 2x - 21 &= 4; \\ 2x &= 25; \\ x &= 12,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 2x - 21 &= 1; \\ 2x &= 22; \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Ответ:  $x = 12,5$ ;  $x = 11$ .

Методом введения новой переменной решаются биквадратные уравнения:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \text{ где } a, b, c \in R;$$

В биквадратных уравнениях всегда используется новая переменная.

$$x^2 = y;$$

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Получается квадратное уравнение.

$$x^4 - 13x^2 + 12 = 0;$$

$$x^4 - 13x^2 + 12 = 0;$$

$$x^2 = y, \text{ тогда } y^2 - 13y + 12 = 0;$$

$$y_1 = 12, \quad y_2 = 1.$$

$$1) x^2 = 12; \quad x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3};$$

$$2) x^2 = 1, \quad x = \pm 1.$$

$$\text{Ответ : } \{-2\sqrt{3}; -1; 2\sqrt{3}; 1\}.$$

Какую замену можно использовать в этом уравнении?

$$\frac{4}{x^2+10} + \frac{5}{x^2+11} = 2. \text{ Стараясь выгодно обозначить.}$$

$$\frac{4}{x^2+10} + \frac{5}{x^2+10+1} = 2; \quad x^2 + 10 = y;$$

$$\frac{4}{y} + \frac{5}{y+1} = 2.$$

### Практическая работа №53 «Решение неравенств с одной переменной»

Рассмотрим решение в общем виде:  $f(x) > g(x)$  (1).

$x_0$  называется частным решением, если  $f(x_0) > g(x_0)$ .

Множество всех частных решений есть общее решение (или просто решение) неравенства. Решить неравенство – значит найти его общее решение.

Рассмотрим отличия неравенств от уравнений:

1. Имеет бесконечное множество решений (как правило).
2. Невозможна проверка подстановкой в исходное неравенство.

Поэтому неравенства можно решать только равносильными преобразованиями:

$$f(x) > g(x) \dots \Leftrightarrow (2) \dots x \in X$$

Решение неравенства заключается в замене исходного неравенства более простым, но равносильным неравенством.

*Определение 1.*

Неравенства  $f(x) > g(x)$  (1) и  $p(x) > k(x)$  (2) называются равносильными, если их решения совпадают.  $f(x) > g(x) \Leftrightarrow p(x) > k(x)$ .

Пример 1

*Пример 1.*

$$1. \quad 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$2. \quad \log(4x - 1) > 0 \Leftrightarrow 4x - 1 > 1 \Leftrightarrow 4x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Множества решений совпадают. Значит:

$$2x - 1 > 0 \Leftrightarrow \log(4x - 1) > 0$$

Определение 2. Равносильность неравенств

Определение 2. Если решение неравенства  $f(x) > g(x)$  (1) содержится в решении неравенства  $p(x) > k(x)$  (2), то неравенство (2) есть следствие неравенства (1).

$$f(x) > g(x) \Rightarrow p(x) > k(x).$$

Рассмотрим некоторые из равносильных преобразований:

$$1. \quad f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0$$

$$2. \quad f(x) > g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x) > g^{2n+1}(x)$$

$$3. \quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \stackrel{a>1}{\Leftrightarrow} f(x) > g(x)$$

$$4. \quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \stackrel{0<a<1}{\Leftrightarrow} f(x) < g(x)$$

$$5. \quad f(x) > g(x) \stackrel{h(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x) * h(x) > g(x) * h(x)$$

$$6. \quad f(x) > g(x) \stackrel{h(x)<0}{\Leftrightarrow} f(x) * h(x) < g(x) * h(x)$$

Рассмотрим примеры, в которых можно допустить типовые ошибки:

## Пример 2

$$1. \frac{1}{x} \leq 1$$

«Решение»:

$$x \neq 0$$

$$\frac{1}{x} * x \leq 1 * x$$

$$x \geq 1$$

«Ответ»:  $x \geq 1$  ( $x = -10, -11$  – частные решения)

Проблема в умножении на  $x$ . Он мог быть и отрицательным, и положительным. Надо менять знак.

Правило: в неравенствах нельзя умножать на  $x$ , если его знак не известен.

$$2. \frac{1}{x} = 1$$

Решение:

$$\frac{1}{x} * x = 1 * x$$

$$x = 1$$

Ответ:  $x = 1$  (верно)

Правильное решение:

3.

$$1. \begin{cases} \frac{1}{x} \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

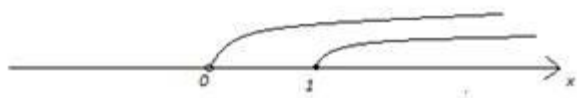


Рис. 1. Иллюстрация к примеру 1

$$2. \begin{cases} \frac{1}{x} \leq 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq x \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0$$

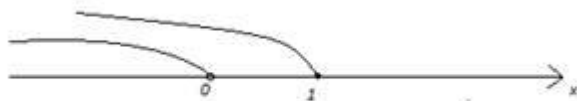


Рис. 2. Иллюстрация к примеру 2

Ответ:  $x < 0$  или  $x \geq 1$

#### Практическая работа №54 «Системы уравнений. Метод подстановки»

Рассмотрим системы двух уравнений с двумя неизвестными (1) и трех уравнений с тремя неизвестными (2).

$$\begin{cases} p(x, y) = 0 \\ q(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $p$  и  $q$  – некоторые выражения, зависящие от пары переменных  $x$  и  $y$ .

$$\begin{cases} p(x, y, z) = 0 \\ q(x, y, z) = 0 \\ r(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $p$ ,  $q$  и  $r$  – некоторые выражения, зависящие от тройки переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Частным решением системы 1 называется пара чисел  $(x_0; y_0)$  такая, при подстановке которой в уравнения системы получим верные равенства.

Частным решением системы 2 называется тройка чисел  $(x_0; y_0; z_0)$  такая, при подстановке которой в уравнения системы получим верные равенства.

Решить систему уравнений означает найти множество всех ее решений.

Чтобы найти множество всех решений системы, лучше всего пользоваться эквивалентными или равносильными преобразованиями, то есть такими, которые не искажают множество решений. В результате таких преобразований мы получаем равносильные системы, то есть имеющие одно и то же множество решений

Таким образом, процесс решения системы сводится к постепенному переходу от заданной сложной системы к все более простой и так до тех пор, пока не получим ответ.

Методы решения систем с помощью эквивалентных преобразований:

-метод подстановки;

-метод алгебраического сложения;

-метод введения новых переменных;

## 2. Суть метода подстановки

Повторим метод подстановки. Напомним суть данного метода. Мы рассматриваем заданную систему вида 1 и замечаем, что в одном из уравнений, пусть во втором, легко выразить одну переменную через другую, пусть  $y$  через  $x$ :

$$\begin{cases} p(x, y) = 0 \\ q(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(x, y) = 0 \\ y = y(x) \end{cases}$$

Полученное выражение подставляем в первое уравнение системы:

$$\begin{cases} p(x, y) = 0 \\ y = y(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(x, y(x)) = 0 \\ y = y(x) \end{cases}$$

Таким образом мы получаем одно уравнение (в данном случае первое) только относительно  $x$ . решаем это уравнение, находим все значения  $x$ , подставляем их в выражение для  $y$  и находим соответствующие значения  $y$ .

## 3. Решение примеров

Пример 1 – решить систему методом подстановки:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$$

В данном случае удобно из первого уравнения выразить  $y$ :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ xy = -2 \end{cases}$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x(1 - x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x - x^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x = 2 \\ y = 1 - x \\ x = -1 \end{cases}$$

Находим соответствующие значения  $y$ :

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ x = 2 \\ y = 1 - x \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2 \\ x = 2 \\ y = 1 - (-1) \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \\ y = 2 \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{Ответ: } (2; -1), (-1; 2)$$

Пример 2 – решить систему методом подстановки:



$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2^x 3^y = 24 \end{cases}$$

В данном случае удобно из первого уравнения выразить  $x$ :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2^x 3^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 2^{y+2} 3^y = 24 \end{cases}$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = y + 2 \\ 2^x 3^y = 24 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 2^{y+2} 3^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 4 * 2^y 3^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 4 * (2 * 3)^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 4 * 6^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 6^y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Находим соответствующее значение  $x$ :

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{Ответ: } (3;1)$$

В следующей системе важно обратить внимание на ОДЗ.

Пример 3 – решить систему методом подстановки:

$$\begin{cases} \log_{y+2}(x+3) = 1 \\ x^2 - 3y = 1 \end{cases}$$

Укажем ОДЗ для первого уравнения:

$$\begin{cases} x + 3 > 0 \\ y + 2 > 0 \\ y + 2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ y > -2 \\ y \neq -1 \end{cases}$$

При соблюдении ОДЗ первое уравнение можно преобразовать:

$$(y + 2)^1 = x + 3 \Leftrightarrow y + 2 = x + 3$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} y + 2 = x + 3 \\ x^2 - 3y = 1 \end{cases}$$

В данном случае удобно из первого уравнения выразить  $y$ :

$$\begin{cases} y + 2 = x + 3 \\ x^2 - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - 3y = 1 \end{cases}$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - 3(x + 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - 3x - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x = 4 \\ y = x + 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Находим соответствующие значения  $y$ :

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x = 4 \\ y = x + 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 + 1 \\ x = 4 \\ y = -1 + 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 4 \\ y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Сверившись с ОДЗ, выписываем ответ. Ответ: (5;4), (-1;0)

Пример 4 – решить систему методом подстановки:

$$\begin{cases} x + y = \pi \\ \cos x - \cos y = 1 \end{cases}$$

В данном случае удобно из первого уравнения выразить  $y$ :

$$\begin{cases} x + y = \pi \\ \cos x - \cos y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - x \\ \cos x - \cos y = 1 \end{cases}$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \pi - x \\ \cos x - \cos y = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - x \\ \cos x - \cos(\pi - x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - x \\ \cos x - (-\cos x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - x \\ 2 \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - x \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - x \\ x = \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n \\ y = \pi - x \\ x = -\arccos \frac{1}{2} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - x \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ y = \pi - x \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \end{aligned}$$

Находим соответствующие значения  $y$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \pi - x \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ y = \pi - x \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - \frac{\pi}{3} - 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ y = \pi + \frac{\pi}{3} - 2\pi n \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2\pi}{3} - 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ y = \frac{4\pi}{3} - 2\pi n \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ:  $(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} - 2\pi n), (-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} - 2\pi n)$

Обратим внимание, что  $n$  здесь пробегает все целочисленные значения

Пример 5 – решить систему методом подстановки:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4 \\ 3^x + 2 \cdot 3^{y-2} = 171 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение:

$$y - x = \sqrt{2}^4 = 4 > 0 \rightarrow \text{ОДЗ соблюдено}$$

Получили равносильную систему:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4 \\ 3^x + 2 \cdot 3^{y-2} = 171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 4 \\ 3^x + 2 \cdot 3^{y-2} = 171 \end{cases}$$

В данном случае удобно из первого уравнения выразить  $y$ :

$$\begin{cases} y - x = 4 \\ 3^x + 2 \cdot 3^{y-2} = 171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ 3^x + 2 \cdot 3^{y-2} = 171 \end{cases}$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x + 4 \\ 3^x + 2 \cdot 3^{y-2} = 171 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ 3^x + 2 \cdot 3^{x+4-2} = 171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ 3^x + 2 \cdot 3^{x+2} = 171 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ 3^x + 2 \cdot 9 \cdot 3^x = 171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ 3^x + 18 \cdot 3^x = 171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ 19 \cdot 3^x = 171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ 3^x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Находим соответствующие значения  $y$ :

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + 4 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ответ: (2;6)

### Практическая работа №55 «Системы уравнений. Метод алгебраического сложения»

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ -x + y + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 6y = 120 \\ 2x - 2y = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \\ 1) & \quad 2) \quad 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 3x - y - 5 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = -13 \end{cases} \\ 4) & \quad 5) \quad 6) \end{aligned}$$

Решите методом сложения систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 5x - 6y = 7, \\ 10x + 6y = 8; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3x - 5y = 14, \\ 2x - 7y = 2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 5x + 4y = 25, \\ 5x - 3y = -3; \end{cases}$$

Решите систему уравнений методом сложения:

$$1) \begin{cases} 3x - 7y = 11, \\ 6x + 7y = 16; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ 7x - 5y = -5. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4x + 2y = 5, \\ 4x - 6y = -7; \end{cases}$$

**Практическая работа №56 «Системы уравнений. Метод введения новых переменных»**  
Задание 1.

Решите систему уравнений методом подстановки:

$$1) \begin{cases} 2x - y = 1, \\ 7x - 6y = -4; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2(x + 2y) - 3(x - y) = 5, \\ 4(x + 3y) - 3y = 17; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 4x - 5y = 1; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{5x}{3} - \frac{3y}{2} = 14, \\ \frac{2x}{3} + \frac{y}{2} = 10. \end{cases}$$

Задание 2.

Решите систему уравнений методом подстановки:

$$1) \begin{cases} 3x + y = 4, \\ 5x - 2y = 14; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3(2x - y) - 5(x + y) = -7, \\ 2(x + 4y) - 5y = 5; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 5x - 3y = 7, \\ 7x - 6y = 8; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{7y}{2} = 11, \\ \frac{4x}{3} - \frac{y}{2} = 7. \end{cases}$$

**Практическая работа №57. «Применение математических методов для решения содержательных задач»**

1. Велосипедист на протяжении первых 20 км ехал со скоростью 20 км/ч, следующие 15 км - 10 км/ч, а последние 30 км - со скоростью 10 км/ч. Необходимо найти среднюю скорость движения велосипедиста.

2. В субботу акции поднялись в цене на неизвестное число процентов, однако во вторник на такое же число процентов от новой суммы они подешевели. В результате такого скачка цен, они стали на 4% дешевле. Необходимо узнать процент, на который акции увеличили стоимость в субботу.

3. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

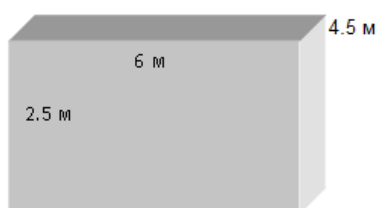
| Тарифный план | Абонентская плата | Плата за трафик  |
|---------------|-------------------|------------------|
| План «0»      | Нет               | 2,5 руб. за 1 Мб |

|            |                                    |                               |
|------------|------------------------------------|-------------------------------|
| План «500» | 600 руб. за 500 Мб трафика в месяц | 2 руб. за 1 Мб сверх 500 Мб   |
| План «800» | 850 руб. за 800 Мб трафика в месяц | 1,5 руб. за 1 Мб сверх 800 Мб |

Пользователь планирует, что его трафик составит 600 Мб и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей должен заплатить пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 600 Мб?

4. Решено комнату (включая потолок) оклеить обоями. Обои покупаются с запасом 20% от оклеиваемой площади. Стоимость обоев указана в таблице. Потолок решено оклеить белыми обоями, стены - зелеными.

Ширина двери комнаты равна 0,8 м, высота - 2 м. Ширина окна - 1,5 м, высота - 1 м. Сколько рублей надо заплатить за обои, если эскиз комнаты представлен на рисунке?



| Цена обоев за 1 м <sup>2</sup> ( в руб.) в зависимости от покупки |                      |                             |                          |
|-------------------------------------------------------------------|----------------------|-----------------------------|--------------------------|
|                                                                   | до 30 м <sup>2</sup> | от 30 до 100 м <sup>2</sup> | свыше 100 м <sup>2</sup> |
| Белые                                                             | 14                   | 13                          | 12                       |
| Зеленые                                                           | 12                   | 11                          | 10                       |

### Практическая работа №58 «Прямоугольный параллелепипед»

Поверхность, составленная из двух равных параллелограммов  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  и четырех параллелограммов  $ABB_1A_1$ ,  $BCC_1B_1$ ,  $CDD_1C_1$ ,  $DAA_1D_1$ , называется **параллелепипедом** (рис. 1).

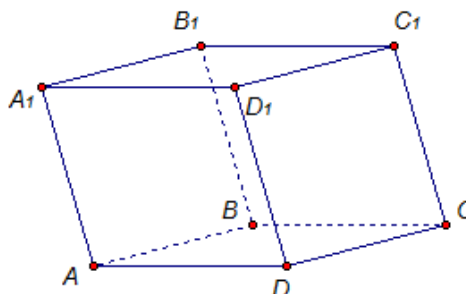


Рис. 1 Параллелепипед

То есть: имеем два равных параллелограмма  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  (основания), они лежат в параллельных плоскостях так, что боковые ребра  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $DD_1$ ,

$CC_1$  параллельны. Таким образом, составленная из параллелограммов поверхность называется **параллелепипедом**.

Таким образом, поверхность параллелепипеда - это сумма всех параллелограммов, из которых составлен параллелепипед.

### Свойства параллелепипеда

1. *Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.*

(фигуры равны, то есть их можно совместить наложением)

Например:

$ABCD = A_1B_1C_1D_1$  (равные параллелограммы по определению),

$AA_1B_1B = DD_1C_1C$  (так как  $AA_1B_1B$  и  $DD_1C_1C$  – противоположные грани параллелепипеда),

$AA_1D_1D = BB_1C_1C$  (так как  $AA_1D_1D$  и  $BB_1C_1C$  – противоположные грани параллелепипеда).

2. *Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.*

Диагонали параллелепипеда  $AC_1$ ,  $B_1D$ ,  $A_1C$ ,  $D_1B$  пересекаются в одной точке  $O$ , и каждая диагональ делится этой точкой пополам (рис. 2).

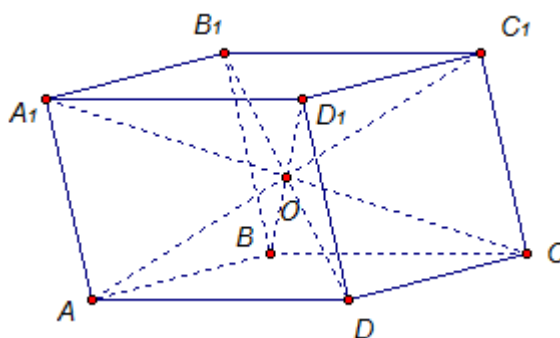


Рис. 2 Диагонали параллелепипеда пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

3. *Имеются три четверки равных и параллельных ребер параллелепипеда: 1 –  $AB$ ,  $A_1B_1$ ,  $D_1C_1$ ,  $DC$ , 2 –  $AD$ ,  $A_1D_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $BC$ , 3 –  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$ .*

### Прямой параллелепипед

Определение. Параллелепипед называется прямым, если его боковые ребра перпендикулярны основаниям.

Пусть боковое ребро  $AA_1$  перпендикулярно основанию (рис. 3). Это означает, что прямая  $AA_1$  перпендикулярна прямым  $AD$  и  $AB$ , которые лежат в плоскости основания. А, значит, в боковых гранях лежат прямоугольники. А в основаниях лежат произвольные параллелограммы. Обозначим,  $\angle BAD = \varphi$ , угол  $\varphi$  может быть любым.

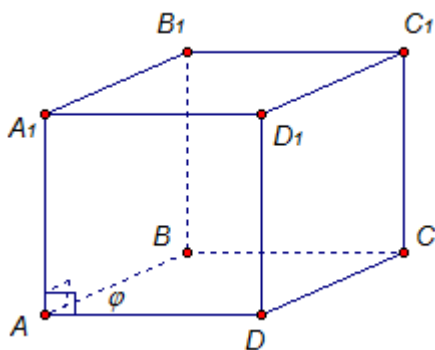


Рис. 3 Прямой параллелепипед

Итак, прямой параллелепипед - это параллелепипед, в котором боковые ребра перпендикулярны основаниям параллелепипеда.

### Прямоугольный параллелепипед

Определение. **Параллелепипед называется прямоугольным**, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию. Основания являются прямоугольниками.

Параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – прямоугольный (рис. 4), если:

1.  $AA_1 \perp ABCD$  (боковое ребро перпендикулярно плоскости основания, то есть параллелепипед прямой).
2.  $\angle BAD = 90^\circ$ , т. е. в основании лежит прямоугольник.

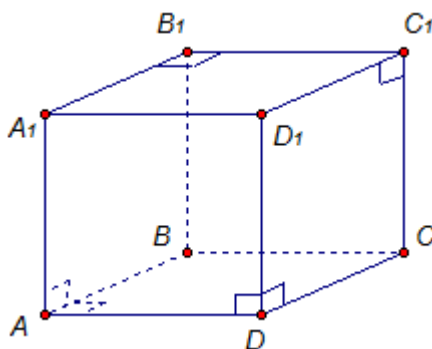


Рис. 4 Прямоугольный параллелепипед

*Прямоугольный параллелепипед обладает всеми свойствами произвольного параллелепипеда. Но есть дополнительные свойства, которые выводятся из определения*

прямоугольного параллелепипеда.

Итак, **прямоугольный параллелепипед** - это параллелепипед, у которого боковые ребра перпендикулярны основанию. **Основание прямоугольного параллелепипеда - прямоугольник.**

### Свойства прямоугольного параллелепипеда

1. *В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней прямоугольники.*

$ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  – прямоугольники по определению.

2. *Боковые ребра перпендикулярны основанию.* Значит, все боковые грани прямоугольного параллелепипеда - прямоугольники.

3. *Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда прямые.*

Рассмотрим, например, двугранный угол прямоугольного параллелепипеда с ребром  $AB$ , т. е. двугранный угол между плоскостями  $ABB_1$  и  $ABC$ .

$AB$  – ребро, точка  $A_1$  лежит в одной плоскости – в плоскости  $ABB_1$ , а точка  $D$  в другой – в плоскости  $A_1B_1C_1D_1$ . Тогда рассматриваемый двугранный угол можно еще обозначить следующим образом:  $\angle A_1ABD$ .

Возьмем точку  $A$  на ребре  $AB$ .  $AA_1$  – перпендикуляр к ребру  $AB$  в плоскости  $ABB_1$ ,  $AD$  перпендикуляр к ребру  $AB$  в плоскости  $ABC$ . Значит,  $\angle A_1AD$  – линейный угол данного двугранного угла.  $\angle A_1AD = 90^\circ$ , значит, двугранный угол при ребре  $AB$  равен  $90^\circ$ .

$$\angle(ABB_1, ABC) = \angle(AB) = \angle A_1ABD = \angle A_1AD = 90^\circ.$$

Аналогично доказывается, что любые двугранные углы прямоугольного параллелепипеда прямые.

### Теорема

*Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.*

Примечание. Длины трех ребер, исходящих из одной вершины прямоугольного параллелепипеда, являются измерениями прямоугольного параллелепипеда. Их иногда называют длина, ширина, высота.

Дано:  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  – прямоугольный параллелепипед (рис. 5).

Доказать:  $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$ .



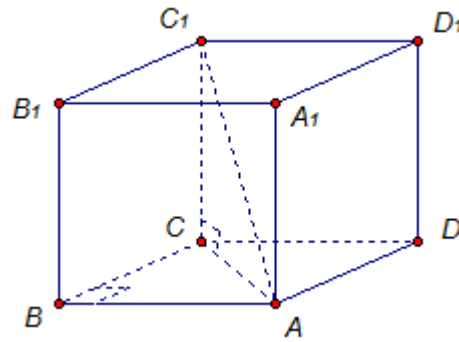


Рис. 5 Прямоугольный параллелепипед

Доказательство:

Прямая  $CC_1$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ , а значит, и прямой  $AC$ . Значит, треугольник  $CC_1A$  – прямоугольный. По теореме Пифагора:

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $ABC$ . По теореме Пифагора:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Но  $BC$  и  $AD$  – противоположные стороны прямоугольника. Значит,  $BC = AD$ . Тогда:

$$AC^2 = AB^2 + AD^2$$

Так как  $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$ , а  $AC^2 = AB^2 + AD^2$ , то  $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + CC_1^2$ . Поскольку  $CC_1 = AA_1$ , то  $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$  что и требовалось доказать.

**Следствие - Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны**

*Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.*

Обозначим измерения параллелепипеда  $ABC$  как  $a, b, c$  (см. рис. 6), тогда  $AC_1 = CA_1 = B_1D = DB_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

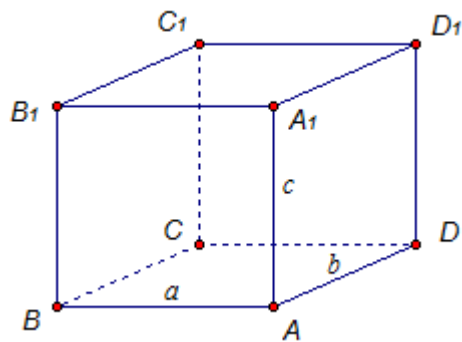


Рис. 6

## Куб

Определение. Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется кубом.

*Все грани куба – это равные квадраты.*

### Задача 1 Найти диагональ куба

Найти диагональ куба с ребром 1 (рис. 7).

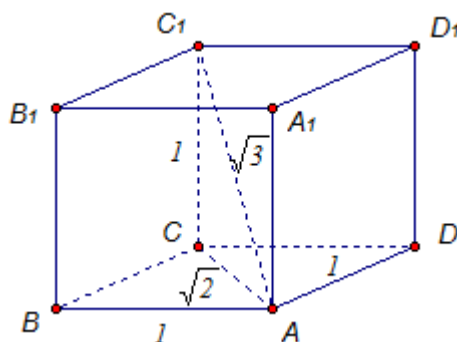


Рис. 7

Решение:

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA_1^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \text{ см.}$$

Ответ:  $\sqrt{3}$  см.

### Задача 2

Рисунок

Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 8). Докажите, что плоскости  $ABC_1$  и  $A_1 B_1 D$  перпендикулярны.

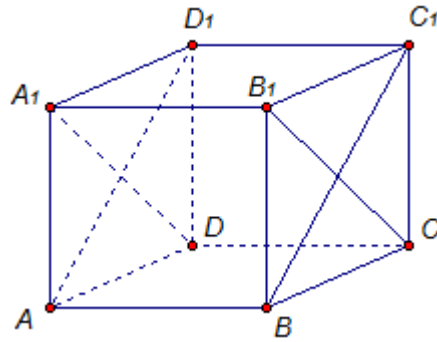


Рис. 8

Доказательство:

Прямые  $BC_1$  и  $B_1C$  перпендикулярны как диагонали квадрата  $BB_1C_1C$ .

Прямая  $DC$  перпендикулярна плоскости  $BB_1C_1$ , а значит, и прямой  $BC_1$ , которая лежит в этой плоскости.

Имеем, прямая  $BC_1$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $B_1C$  и  $DC$  плоскости, значит  $A_1B_1D$ . Значит, прямая  $BC_1$  перпендикулярна плоскости  $A_1B_1D$ .

Плоскость  $ABC_1$  проходит через перпендикуляр  $BC_1$  ко второй плоскости  $A_1B_1D$ , значит, плоскости  $ABC_1$  и  $A_1B_1D$  перпендикулярны по признаку, что и требовалось доказать.

**Практическая работа №59** «Решение стереометрических задач, связанных с перпендикулярностью прямых и плоскостей, используя планиметрические факты и методы»

**«Перпендикулярность прямой и плоскости»**

Вариант 1

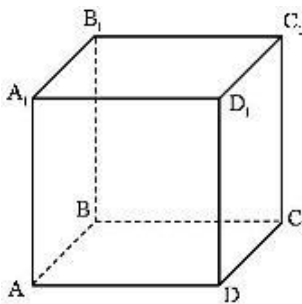


Рис. 1

A1. Пользуясь изображением на рисунке 1, назовите:

а) точку пересечения прямой  $AD$  с плоскостью  $DD_1C$ ;

б) линию пересечения плоскостей  $ADD_1$  и  $D_1CD$ .

В какой из плоскостей  $ADD_1$ ,  $A_1B_1B$ ,  $BB_1C_1$ ,  $BCD$  не лежит точка  $A$ ?

и постройте:

а) точку пересечения прямой  $AD$  с плоскостью  $ABC$ ;

б) линию пересечения плоскостей  $ADD_1$  и  $D_1CD$ .

В1. Точка  $O$  –

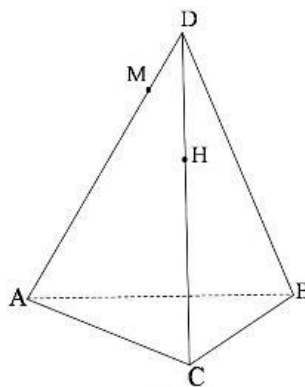


Рис. 2

A2. Перечертите рисунок 2 в тетрадь

пересечения прямой  $MN$  с

пересечения плоскостей  $MNB$  и  $ABC$ .

центр окружности, описанной около

треугольника  $ABC$ . Принадлежит ли точка  $C$  плоскости, в которой лежат точки  $A$ ,  $B$  и  $O$ ?

Вариант 2

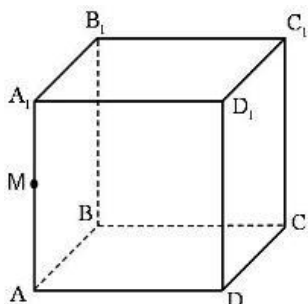


Рис. 1

A1. Пользуясь изображением на рисунке 1, назовите:

а) точку пересечения прямой  $MC$  с плоскостью  $B_1BC_1$ ;

б) линию пересечения плоскостей  $MC_1C$  и  $BCB_1$ .

В каких из плоскостей  $ADD_1$ ,  $ABB_1$ ,  $ABD$ ,  $MD_1C_1$ , лежит прямая  $MD_1$ ?

A2. Перечертите рисунок 2 в тетрадь и постройте:

а) точку пересечения прямой  $PK$  с плоскостью  $ABC$ ;

б) линию пересечения плоскостей  $PAC$  и  $ADC$ .

Точка  $O$  — центр окружности, описанной около четырехугольника  $ABCD$ . Точки  $A$ ,  $O$  и  $C$  принадлежат плоскости  $\alpha$ . Принадлежит ли этой вершина  $D$ ?

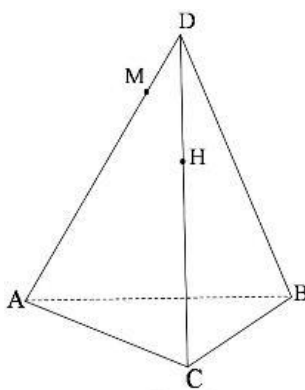


Рис. 2

пересечения прямой  $PK$  с плоскостью

пересечения плоскостей  $PAC$  и  $ADC$ .

центр окружности, описанной около четырехугольника  $ABCD$ . Точки  $A$ ,  $O$  и  $C$  принадлежат плоскости  $\alpha$ . Принадлежит ли этой вершина  $D$ ?

**«Перпендикуляр и плоскостью. Двугранный угол»**

Вариант I

1. Прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$ , прямая  $b$  также параллельна плоскости

$\alpha$ . Могут ли  $a$  и  $b$ :

а) Быть параллельными?

б) Пересекаться?

в) Быть скрещивающимися прямыми?

2. Точка  $M$  лежит вне плоскости параллелограмма  $ABCD$ .

а) Докажите, что средние линии треугольников  $MAD$  и  $MBC$  параллельны.

б) Найдите эти средние линии, если боковая сторона параллелограмма равна 5, а его высота равная 4 и делит сторону, к которой проведена, пополам.

3. Плоскость  $\alpha$  пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно.  $BN:NC=5:8$ .  $MB:AB=5:13$ .

а) Докажите, что  $AC \parallel \alpha$ .

б) Найдите  $MN$ , если  $AC=26$ .

4. Через вершину  $C$  квадрата  $ABCD$ , проходит прямая  $СК$ , не лежащая в плоскости квадрата.

- а) Докажите, что СК и АД скрещивающиеся.
- б) Чему равен угол между СК и АД. Угол СВК равен 45 градусов, угол СКВ равен 75 градусов?

Вариант II

1. Прямая а пересекает плоскость  $\alpha$ , прямая b также пересекает плоскости  $\alpha$ . Могут ли а и b:
- а) Быть параллельными?
- б) Пересекаться?
- в) Быть скрещивающимися прямыми?
2. Треугольник ABC и трапеция KMNP имеют общую среднюю линию EF,  $MN \parallel EF$ ,  $EF \parallel BC$ .
- а) Докажите, что  $BC \parallel KP$ .
- б) Найдите KP и MN, если  $BC=24$ ,  $KP:MN = 8:3$ .
3. Плоскость  $\alpha$  проходит через сторону АВ треугольника ABC. Прямая пересекает стороны BC и AC в точках М и N соответственно.  $MC:BC=6:13$ ,  $NC:AN=6:7$ .
- а) Докажите, что  $MN \parallel \alpha$ .
- б) Найдите MN, если  $AC=39$ .
4. Точка F лежит вне плоскости трапеции ABCD.
- а) Докажите, что AF и BC скрещивающиеся.
- б) Чему равен угол между AF и BC, если угол AFD равен 70 градусов, угол FDA равен 40 градусов?

**Практическая работа №60 «Подготовка к контрольной работе»**

- 1 Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$ . Из точки  $M$  проведены перпендикуляры  $MA$  и  $MB$  соответственно к плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$ . Прямая  $a$  пересекает плоскость  $AMB$  в точке  $C$ . Докажите, что  $MC \perp a$ .
- 2 Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой  $a$ . Из точки  $M$  проведены перпендикуляры  $MA$  и  $MB$  к этим плоскостям. Прямая  $a$  пересекает плоскость  $AMB$  в точке  $C$ . а) Докажите, что четырехугольник  $ACBM$  является прямоугольником. б) Найдите расстояние от точки  $M$  до прямой  $a$ , если  $AM = m$ ,  $BM = n$ .
- 3 Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$  и перпендикулярны к плоскости  $\gamma$ . Докажите, что прямая  $a$  перпендикулярна к плоскости  $\gamma$ .
- 4 Общая сторона  $AB$  треугольников  $ABC$  и  $ABD$  равна 10 см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найдите  $CD$ , если треугольники: а) равносторонние; б) прямоугольные равнобедренные с гипотенузой  $AB$ .
- 5 Прямая  $a$  не перпендикулярна к плоскости  $\alpha$ . Докажите, что существует плоскость, проходящая через прямую  $a$  и перпендикулярная к плоскости  $\alpha$ .

#### Решение

Через произвольную точку  $M$  прямой  $a$  проведем прямую  $p$ , перпендикулярную к плоскости  $\alpha$ , и рассмотрим плоскость  $\beta$ , проходящую через прямые  $a$  и  $p$ . Плоскость  $\beta$  является искомой, так как она проходит через прямую  $a$  и по признаку перпендикулярности двух плоскостей перпендикулярна к плоскости  $\alpha$ .

#### Практическая работа №61 «Площадь поверхности призмы, пирамиды»

##### Задание 1

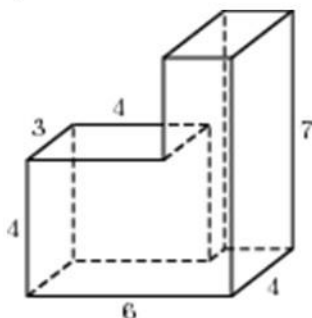
Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

##### Задание 2

Через среднюю линию основания треугольной призмы, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна 37.

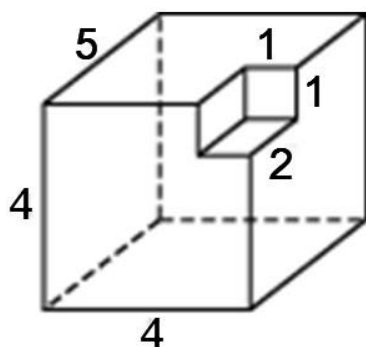
##### Задание 3

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



#### Задание 4

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



#### Практическая работа №62 «Площадь поверхности цилиндра»



Рис. 1. Цилиндрическая бочка

Мы с вами знаем, что такое цилиндр, попробуем найти площадь его поверхности. Зачем нужно решать такую задачу? Например, нужно понять, сколько материала пойдет на изготовление цилиндрической бочки (См. Рис. 1).



Рис. 2. Пизанская башня

Или сколько кирпичей понадобится, чтобы сложить кирпичную башню (вроде Пизанской, только ровную)? (См. Рис. 2.)

|                                                                                   |                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |
| Рис. 3. Бочка, обмотанная тканью                                                  | Рис. 4. Разрезанная ткань                                                          |

Конечно, измерить площадь боковой поверхности цилиндра просто так не получится. Но представим себе все ту же бочку, обмотанную тканью. (См. Рис. 3.) Как найти площадь куска ткани? Ну конечно, разрезав ткань и разложив ее на столе! Получится прямоугольник, его площадь легко найдем. (См. Рис. 4.)

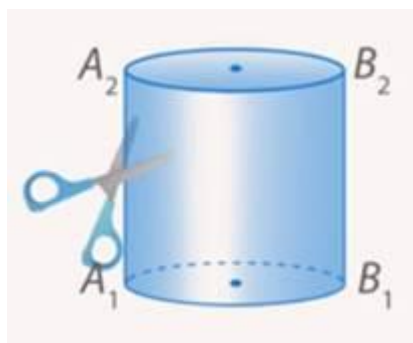


Рис. 5

Сделаем так же с цилиндром. «Разрежем» его боковую поверхность вдоль любой образующей, например  $A_1A_2$ . (См. Рис. 5.)

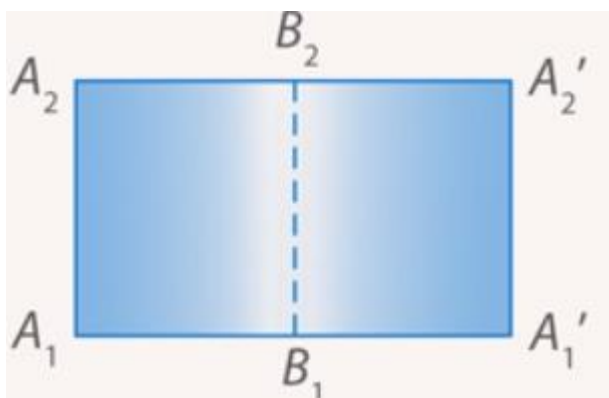


Рис. 6. Развертка боковой поверхности

Теперь «размотаем» боковую поверхность на плоскость. Получаем прямоугольник  $A_1A_2B_2B_1$ , где  $A_1$  и  $A_1'$  – одна и та же точка на цилиндре (аналогично  $A_2$  и  $A_2'$ ). (См. Рис. 6.)

Такой прямоугольник называется разверткой боковой поверхности цилиндра.



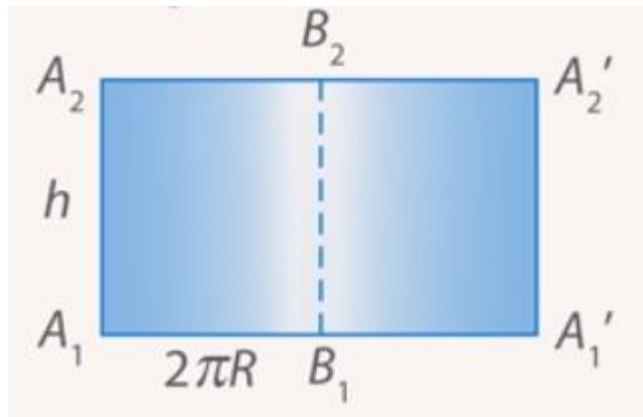


Рис. 7. Развертка боковой поверхности

Что мы знаем про этот прямоугольник? Его сторона  $A_1A_2$  равна высоте цилиндра (ведь образующая равна высоте). Другая сторона  $A_1A_1'$  равна длине окружности основания, то есть  $2\pi R$ . (См. Рис. 7.)

Значит, площадь прямоугольника равна  $2\pi R h$ . Итак,  $S_{б.п.} = 2\pi R h$ , где  $R$  – радиус основания цилиндра,  $h$  – высота.

#### Площадь полной поверхности цилиндра

Наряду с площадью боковой поверхности можно найти и площадь полной поверхности. Для этого к площади боковой поверхности надо прибавить площади оснований. Но каждое основание – это круг радиуса  $R$ , чья площадь по формуле равна  $\pi R^2$ .

Окончательно, имеем:

$$S_{п.п.} = S_{б.п.} + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + h), \text{ где } R \text{ – радиус основания цилиндра, } h \text{ – высота.}$$

#### Примеры задач на применение выведенных формул

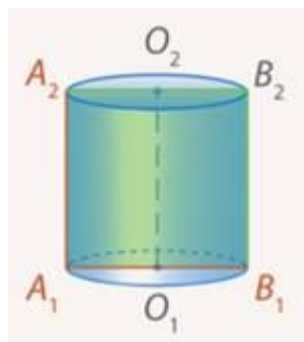


Рис. 8. Иллюстрация к примеру 1

*Пример 1.* Площадь боковой поверхности цилиндра равна  $S$ . Найти площадь осевого сечения цилиндра. (См. Рис. 8.)

Решение. Как мы знаем,  $S_{б.п.} = 2\pi R h$ , а  $S_{ос} = 2Rh$ . Значит  $S_{ос} = S_{б.п.} : \pi = \frac{S}{\pi}$ .

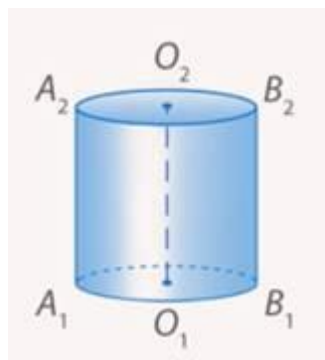


Рис. 9. Иллюстрация к примеру 2

Ответ:  $\frac{5}{\pi}$ .

**Пример 2.** Высота цилиндра на 12 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна  $288\pi \text{ см}^2$ . Найти радиус основания и высоту. (См. Рис. 9.)

Решение. По формуле имеем:  $2\pi R(R + h) = 288\pi$ ;  $R(R + h) = 144$ .

По условию,  $h = R + 12$ , имеем:

$$R(2R + 12) = 144; R^2 + 6R - 72 = 0;$$

$$\begin{cases} R = 6 \\ R = -12 \end{cases}.$$

Так как радиус положителен, то  $R = 6 \text{ см}; h = 18 \text{ см}$ .

Ответ:  $R = 6 \text{ см}; h = 18 \text{ см}$ .

### Практическая работа №63 «Площадь боковой и полной поверхности конуса»

1. Радиус основания конуса равен 3, высота равна 4. Найдите площадь полной поверхности конуса, его объем.
2. Осевое сечение конуса равнобедренный треугольник со стороной 10 см. Найдите площадь боковой и полной поверхности конуса. Объем конуса.
3. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48. Угол между этой диагональю и образующей равен  $30^\circ$ . Найдите радиус цилиндра, его высоту, площади боковой и полной поверхностей и объем.
4. Пусть  $V$ ,  $r$  и  $h$  соответственно объем, радиус и высота цилиндра. Найдите: а)  $V$ , если  $r=2\sqrt{2} \text{ см}$ ,  $h=3 \text{ см}$ ; б)  $r$ , если  $V=120 \text{ см}^3$ ,  $h=3,6 \text{ см}$ ; в)  $h$ , если  $r=h$ ,  $V=8\pi \text{ см}^3$

### Практическая работа №64 «Вычисление площади поверхности тел вращения.»

Вариант 1

1. Образующая конуса равна 8 см и наклонена к плоскости основания под углом  $30^\circ$ . Найдите полную поверхность конуса.
2. Боковая поверхность конуса равна  $S$ , а радиус основания –  $R$ . Найдите длину хорды основания, которая видна из вершины конуса под углом  $\alpha$ .

3. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 и 6 см. Найдите боковую поверхность конуса, если его высота равна 4 см.

Вариант 2

1. Высота конуса равна 3 см и составляет с образующей угол  $60^\circ$ . Найдите полную поверхность конуса.

2. Боковая поверхность конуса равна  $S$ , а образующая –  $l$ . Найдите длину хорды основания, которая видна из центра основания под углом  $\alpha$ .

3. Радиус большего основания усеченного конуса равен 7 см, а его высота и образующая равны 3 и 5 см соответственно. Найдите боковую поверхность конуса.

### Практическая работа №65 «Объем призмы, цилиндра, пирамиды, конуса и шара»

Легко или сложно вычислять объемы? Пока мы умеем находить лишь объемы параллелепипедов, цилиндров и призм, поэтому задача вычисления объемов кажется довольно легкой. Действительно, и формулы доказывались без труда, и вычисления были не слишком громоздкими. Собственно, формула для нахождения объема прямоугольного параллелепипеда известна еще с начальной школы.

Идея была относительно проста. Мы ввели объем куба, через него нашли объем прямоугольного параллелепипеда, по сути, «разбив» его на кубики, отсюда пришли к призмам, а от них – к цилиндрам. Но в случае пирамиды и конуса «разбить» их на кубики не получится.

Хотя древние греки пробовали. В V веке до н. э. греческим математиком Демокритом было высказано предположение, что объем пирамиды равен трети объема призмы с тем же основанием и той же высотой. Доказать это не смог ни он, ни получивший позднее тот же результат Евклид. Впрочем, данная формула подтверждалась практикой – действительно, мы можем измерить объем любой конкретной пирамиды с любой степенью точности. Например, если взять пирамидку и заполнить ее чем-нибудь (водой, песком), а потом вычислить объем того, чем мы заполняли. Впрочем, ученые и по сей день пытаются разбить призму на три равных пирамиды, что доказало бы формулу.

### Практическая работа №66-67. Комбинация многогранников и тел вращения.

1. Радиусы оснований усеченного конуса 3 м и 6 м, высота 4 м. Найдите образующую.
2. Диаметр шара 25 см. На его поверхности даны точка  $A$  и окружность, все точки которой удалены (по прямой) от  $A$  на 15 см. Найдите радиус этой окружности.
3. Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.
4. Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси.
5. Высота цилиндра 2 м. Радиус основания 7 м. В этот цилиндр наклонно вписан квадрат так, что все вершины его лежат на окружностях оснований. Найдите сторону квадрата.
6. Радиус основания конуса 3 м, высота 4 м. Найдите образующую  $l$ .
7. Образующая конуса  $l$  наклонена к плоскости основания под углом  $30^\circ$ . Найдите высоту.
8. Правильная  $n$ -угольная призма вписана в шар радиуса  $R$ . Ребро основания призмы равно  $a$ . Найдите высоту призмы при: 1)  $n = 3$ ;

2)  $n = 4$ ; 3)  $n = 6$ .

## Объем пирамиды и усеченной пирамиды

В наши дни формула давно доказана. И сделано это с помощью интегралов. Помним, что  $V = \int_a^b S(x) dx$ , где  $S(x)$  – это площадь сечения фигуры плоскостью, перпендикулярной некоторой оси, которую мы провели.

С помощью этого метода выведем объем пирамиды. Начнем с объема треугольной пирамиды.

Рассмотрим пирамиду  $OABC$  ( $O$  – вершина), обозначим ее объем через  $V$ ; площадь ее основания  $S_{ABC} = S$ ; ее высота  $OH = h$  (см. Рис. 1).

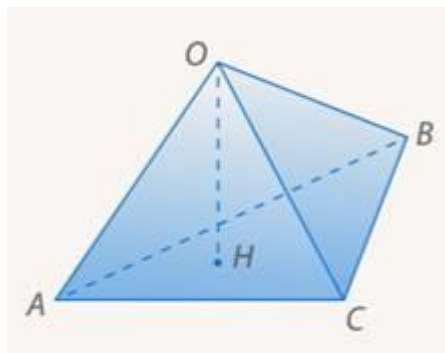


Рис. 1. Пирамида  $OABC$

Проведем ось  $OX$ , совпадающую с лучом  $OH$ . Рассмотрим произвольную точку  $M$  на этой оси внутри пирамиды. Через эту точку проведем сечение  $A_1B_1C_1$ , перпендикулярное нашей оси. Помним, что  $V = \int_0^h S(x) dx$ , где  $S(x)$  – площадь сечения  $A_1B_1C_1$  (см. Рис. 2). Выразим, чему равно  $S(x)$ .

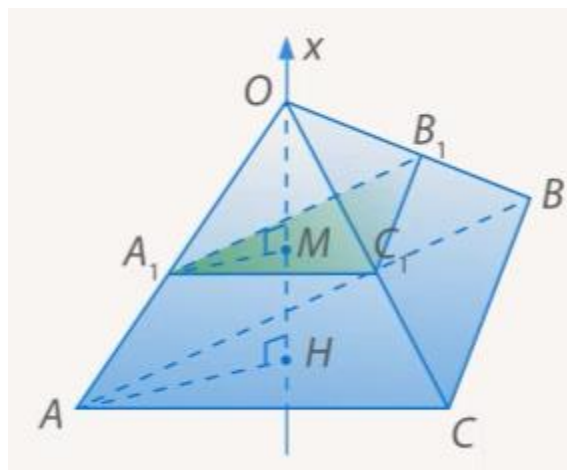


Рис. 2. Проведенные ось  $OX$  и перпендикулярное оси сечение  $A_1B_1C_1$

Заметим, что  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ : из того, что плоскости  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$  перпендикулярны оси  $OX$ , следует, что плоскости параллельны, а значит,  $A_1C_1 \parallel AC$ ,  $B_1C_1 \parallel BC$  и  $A_1B_1 \parallel AB$ . Тогда получается, что  $\Delta A_1OC_1 \sim \Delta AOC$ ,  $\Delta B_1OC_1 \sim \Delta BOC$  и  $\Delta A_1OB_1 \sim \Delta AOB$ , откуда следует, что  $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{OC_1}{OC} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1B_1}{AB} = k$  (по третьему признаку подобия) (см. Рис. 3).

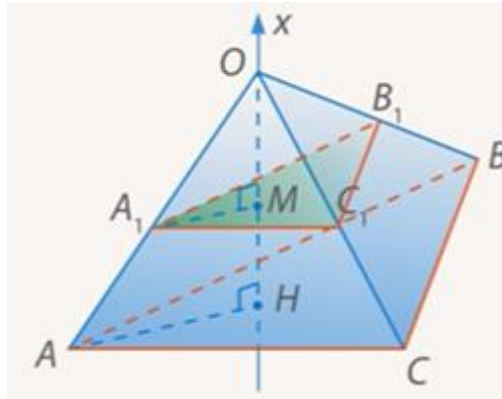


Рис. 3. Подобные треугольники

Найдем, чему равен коэффициент подобия  $k$ .

Рассмотрим  $\Delta AHO$  и  $\Delta A_1MO$ . Они подобны с тем же коэффициентом  $k$ , т. е.  $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OM}{OH} = k$ . Из условия  $OH = h$ , и пусть  $MH = x$ , тогда  $OM = h - x$ . Получаем, что  $\frac{OM}{OH} = \frac{h-x}{h} = k$ .

Учитывая, что  $\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = k^2$ , получаем  $\frac{S(x)}{S} = \frac{(h-x)^2}{h^2}$ ;  $S(x) = \frac{S(h-x)^2}{h^2}$ .

Окончательно,

$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \frac{S(h-x)^2}{h^2} dx = S \int_0^h \frac{(x-h)^2}{h^2} d(x-h) = S \cdot \frac{(x-h)^3}{3h^2} \Big|_0^h = 0 - \left( -\frac{S \cdot h^3}{3h^2} \right) = \frac{Sh}{3}$$

Итак, мы доказали, что объем треугольной пирамиды  $V = \frac{1}{3} S \cdot h$ .

Осталось вывести формулу для произвольной пирамиды. Это делается просто: разбиваем произвольную пирамиду на треугольные (см. Рис. 4).

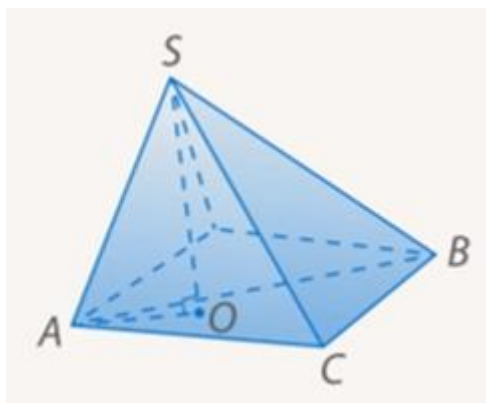


Рис. 4. Разбиение произвольной пирамиды на треугольные

Тогда

$$V_{\text{пр.пир.}} = V_{1 \text{ тр.пир.}} + V_{2 \text{ тр.пир.}} = \frac{S_{1 \text{ осн.}} \cdot h}{3} + \frac{S_{2 \text{ осн.}} \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S_{1 \text{ осн.}} + S_{2 \text{ осн.}}) = \frac{1}{3} h \cdot S_{\text{пр.пир.}}$$

Итак, окончательно, теорема, которую мы доказали: объем пирамиды равен трети произведения площади ее основания и высоты  $V = \frac{1}{3} S \cdot h$ .

В качестве следствия можно доказать и формулу для вычисления объема усеченной пирамиды (см. Рис. 10):  $V_{\text{ус.пир.}} = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$ , где  $h$  – высота усеченной пирамиды, а  $S_1$  и  $S_2$  – площади ее оснований.

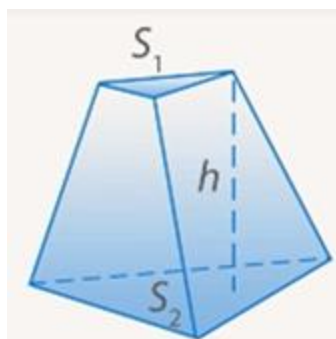


Рис. 10. Усеченная пирамида

### Доказательство (без интеграла)

Докажем, что  $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S \cdot h$ . Как и в первом доказательстве, мы докажем формулу для треугольной пирамиды, а как она обобщается до произвольной, вы уже знаете.

Пусть  $SABC$  – треугольная пирамида,  $S$  – вершина,  $\triangle ABC$  – основание (см. Рис. 5).

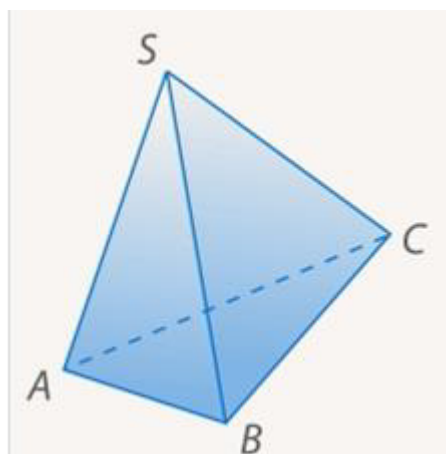


Рис. 5.  $SABC$  – треугольная пирамида

Дополним эту пирамиду до призмы с тем же основанием и высотой (см. Рис. 6).

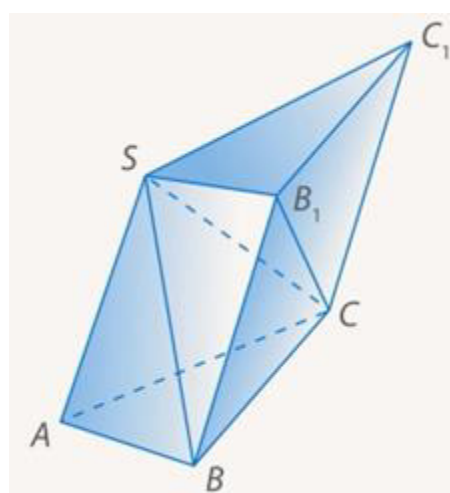


Рис. 6. Призма  $ABCSB_1C_1$

Эта призма составлена из трех пирамид: данной  $SABC$ ,  $SBCB_1$  и  $SCC_1B_1$  (см. Рис. 7).

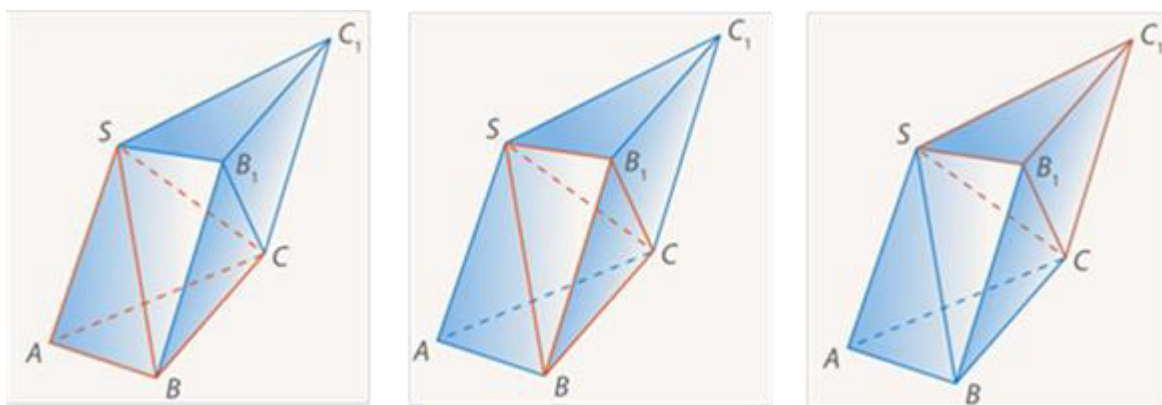


Рис. 7. Призма из трех пирамид

Рассмотрим исходную пирамиду  $ABCS$  и пирамиду  $BCSB_1$ . Заметим, что  $SB$  у них — общая высота, образованная при проведении диагонали в параллелограмме  $AB_1BC$ . Высоты, проведенные из точки  $S$  на каждую из этих плоскостей, совпадают (см. Рис. 8).

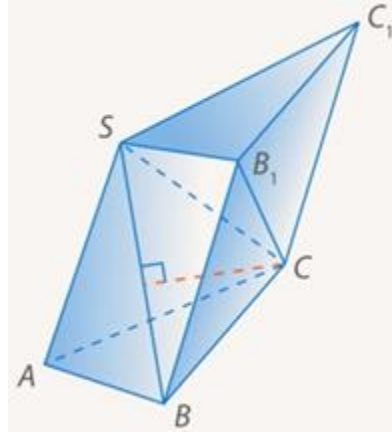


Рис. 8. Высота, проведенная к плоскости  $ASB_1B$

Раз у пирамид  $ABCS$  и  $BCSB_1$  равны высоты и основания, то равны и объемы  $V_{ABCS} = V_{BCSB_1}$  (следует из равенства объемов равновеликих тел).

Аналогично если рассмотреть пирамиды  $SCC_1B_1$  и  $SCBB_1$ , то  $V_{SCC_1B_1} = V_{SCBB_1}$ , т. е.  $\Delta CC_1B_1 = \Delta B_1BC$  (как треугольники, образованные при проведении диагонали  $B_1C$  в параллелограмме  $BB_1C_1C$ ). Высоты, проведенные из точки  $S$  на каждую из этих плоскостей, совпадают  $h_1 = h_2$  (см. Рис. 9). То есть площади оснований и высоты равны.

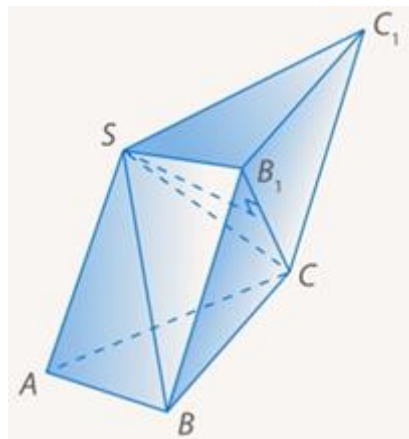


Рис. 9. Высота, проведенная к плоскости  $BB_1C_1C$

Получили, что все три пирамиды имеют один и тот же объем  $V_{SCC_1B_1} = V_{SCBB_1} = V_{ABCS}$ , то есть  $V_{\text{пр.}} = V_{SCC_1B_1} + V_{SCBB_1} + V_{ABCS} = 3V_{ABCS} = Sh$ ,



откуда  $V_{ABCS} = \frac{Sh}{3}$ . Теорема доказана.

### Объем усеченной пирамиды

Итак, пусть у усеченной пирамиды  $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$  основания имеют площади  $S_1, S_2$ ; высота –  $h$ . Достроим эту усеченную пирамиду до обычной пирамиды. Пусть  $O$  – вершина пирамиды. Опустим высоту, она пересечет основания в точках  $M_1$  и  $M_2$  соответственно. Пусть  $OM_2 = x$  (см. Рис. 11).

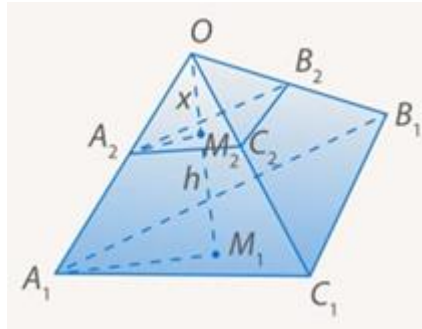


Рис. 11. Иллюстрация к условию

Заметим, что  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$  и коэффициент подобия  $k = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$  (обосновывалось ранее).

Тогда очевидно, что объем усеченной пирамиды равен разности объемов большой пирамиды и малой, то есть:

$$V = V_{OA_1B_1C_1} - V_{OA_2B_2C_2} = \frac{1}{3}S_1(x+h) - \frac{1}{3}S_2 \cdot x$$

Осталось найти  $x$ .

Из того, что  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$ , получаем  $\frac{A_2M_2}{A_1M_1} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$  (в силу того что это соответствующие отрезки подобных фигур, чьи площади нам известны).

С другой стороны,  $\Delta OM_2A_2 \sim \Delta OM_1A_1$  (было выведено ранее), тогда  $\frac{OM_1}{OM_2} = \frac{h+x}{x} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$ .

Значит,  $(h+x)\sqrt{S_2} = x\sqrt{S_1}$ ,  $h = x\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} - x$ ;  $x = \frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}$ .

Окончательно,

$$V = \frac{1}{3} \left( S_1 \cdot \left( h + \frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \right) - S_2 \cdot \frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{hS_1\sqrt{S_1} - hS_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \cdot (S_1\sqrt{S_1} - S_2\sqrt{S_2}) = \frac{1}{3} h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$$

в силу формулы разности кубов. Что и требовалось доказать.

### Пример 1

Закрепим выведенную формулу объема пирамиды примером.

Чему равен объем  $V$  правильной треугольной пирамиды  $SABC$ , если  $AB = 6$ ,  $AS = 4$ ?  
(См. Рис. 12.)

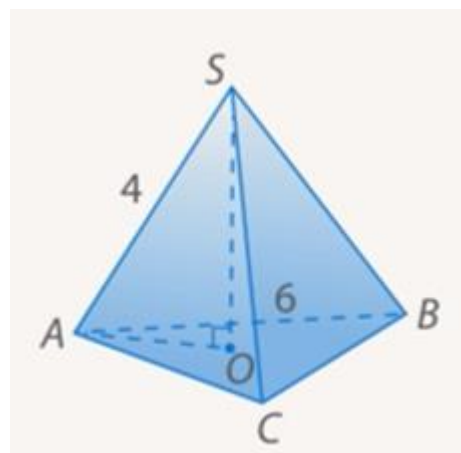


Рис. 12. Иллюстрация к задаче

Решение. Как мы знаем,  $V = \frac{1}{3} S \cdot h$ .

Поскольку в основании лежит правильный треугольник (см. Рис. 13),  
то  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ .

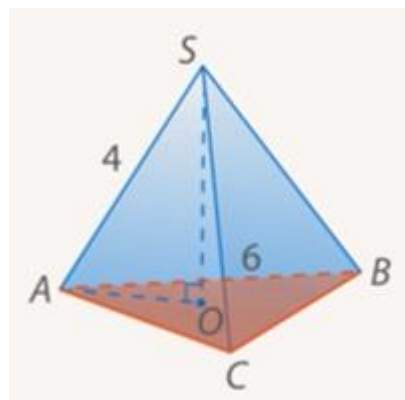


Рис. 13. Правильный треугольник в основании

Найдем высоту  $SO$  из прямоугольного треугольника  $\triangle SOA$ . Гипотенуза  $SA = 4$ , а катет  $OA = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ , то есть (см. Рис. 14).

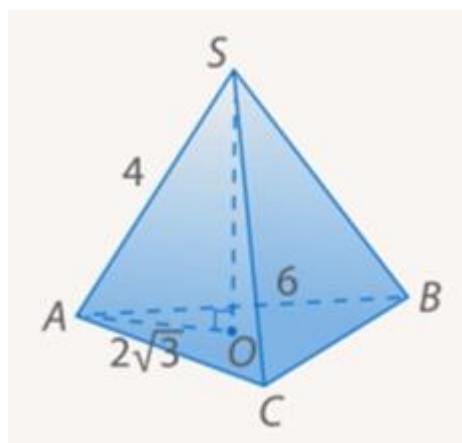


Рис. 14. Стороны  $\triangle SOA$

Отсюда по теореме Пифагора  $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{16 - 12} = 2$ . А значит, объем равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2 = 6\sqrt{3}$$

Ответ:  $6\sqrt{3}$ .

### Объем конуса и усеченного конуса

Теорема. Объем конуса (см. Рис. 15) равен  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}Sh$ , где  $R$  – радиус основания конуса,  $h$  – его высота.

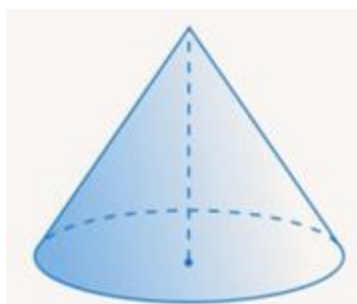


Рис. 15. Конус

Формула для вычисления объема конуса в точности совпадает с аналогичной формулой для пирамиды, так как конус – это, по сути, и есть пирамида, только в основании лежит «бесконечноугольник» – окружность (см. Рис. 16).

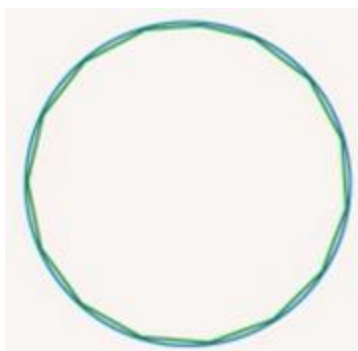


Рис. 16. Многоугольник, стремящийся к окружности

Если подставить в формулу объема пирамиды площадь основания конуса, то есть площадь круга, то мы и приходим к формуле  $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ .

Доказывается же формула для конуса абсолютно аналогично пирамиде. Рассматривается такая же ось, отмечается точно такое же подобие, а дальше берется тот же самый интеграл (см. Рис. 17).

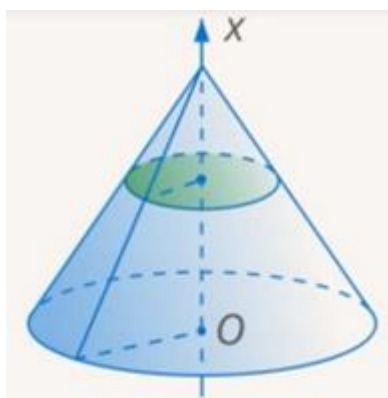


Рис. 17. Иллюстрация для доказательства формулы

Аналогичным выглядит и следствие про усеченный конус (см. Рис. 18):  $V_{\text{уск}} = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) = \frac{1}{3} \pi h (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$ . Доказательство абсолютно аналогично тому, что было приведено для усеченной пирамиды.

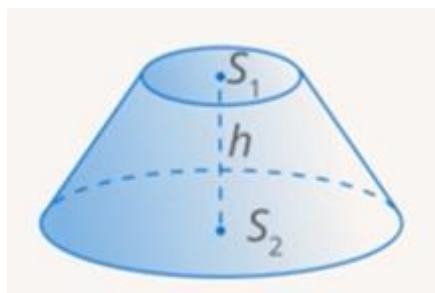
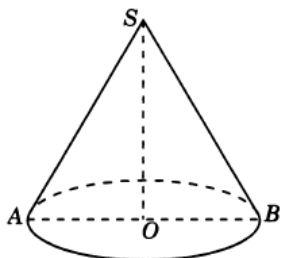


Рис. 18. Усеченная пирамида

Задание 1.

Диаметр основания конуса равен 12, а длина образующей – 10. Найдите объем конуса.

В ответе запишите  $\frac{V}{\pi}$ .



Решение:

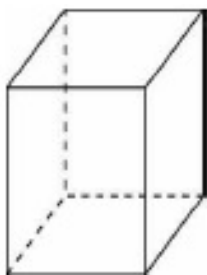
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$r = 6 \quad h = 8 \quad V = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$$

Ответ: 96.

Задание 2.

Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 4, 5 и 8. Найдите объем параллелепипеда.



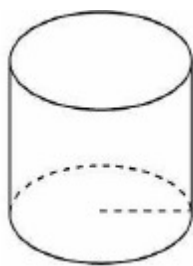
$V = a \cdot b \cdot c$  – формула с 5 класса

$$V = 4 \cdot 5 \cdot 8 = 160$$

Ответ: 160

Задание 3.

Радиус основания цилиндра равен 4, высота  $\frac{10}{\pi}$ . Найдите объем цилиндра.



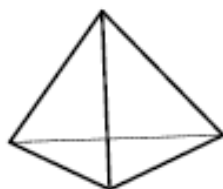
$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{10}{\pi} = 160$$

Ответ: 160

Задание 4.

В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 4 и 3. Найдите объем пирамиды, если её высота равна 9.



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$$

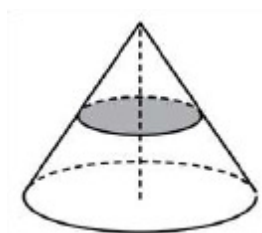
$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \quad S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 9 = 18$$

Ответ: 18

Задание 5.

Объем конуса равен 12. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту конуса пополам. Найдите объем отсеченного конуса.



Способ 1.

Линейные размеры большого конуса  $r$  и  $h$ . Линейные размеры маленького конуса  $\frac{r}{2}$  и  $\frac{h}{2}$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 = 12$$

$$\frac{1}{3}\pi \frac{r^2}{4} \cdot \frac{h}{2} = V_m$$

Преобразуем:

$$\pi r^2 = 36$$

$$\frac{1}{24}\pi r^2 = V_m$$

Подставим:

$$\frac{1}{24} \cdot 36 = V_m$$

$$V_m = 1,5$$

Ответ: 1,5 - сложно

Способ 2.

Подсказка:

При изменении всех линейных размеров тела в  $k$  раз, объем этого тела изменяется в  $k^3$  раз.

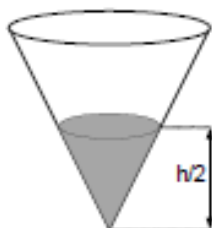
$$k = 2 \quad k^3 = 8 \quad V = \frac{12}{8} = 1,5$$

Ответ: 1,5

Данный прием решения задач не требует знания формулы объема конуса.

Задание 6.

Коническая воронка объемом 16 литров полностью заполнена жидкостью. Из воронки вычерпали часть жидкости, при этом ее уровень снизился до половины высоты воронки. Сколько литров жидкости вычерпали?



$$k = 2 \quad k^3 = 8 \quad V = \frac{16}{8} = 2$$

Найдем сколько литров жидкости вычерпали:

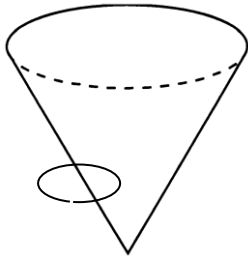
$$16-2=14$$

Ответ:14

Задание 7.

В сосуд в виде конуса налита жидкость до  $\frac{1}{4}$  высоты. Объем налитой жидкости равен

5. Сколько жидкости нужно долить, чтобы наполнить сосуд доверху?



$$k = 4 \quad k^3 = 64 \quad V = 64 \cdot 5 = 320$$

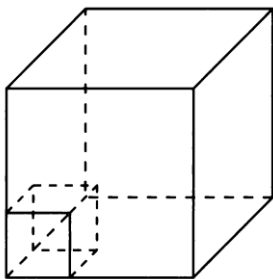
Найдем сколько жидкости нужно долить, чтобы наполнить сосуд доверху:

$$320-5=315$$

Ответ:315

Задание 8.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен 108. Чему будет равен объем параллелепипеда, если каждое его ребро уменьшить в три раза?



$$k = 3 \quad k^3 = 27 \quad V = \frac{108}{27} = 4$$

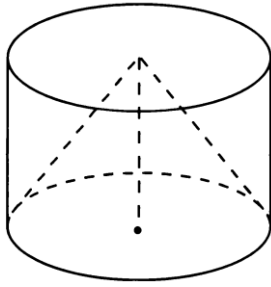
Ответ: 4

Задание 9.

Объем цилиндра равен 30. Чему равен объем конуса с таким же основанием и



высотой?



Подсказка:

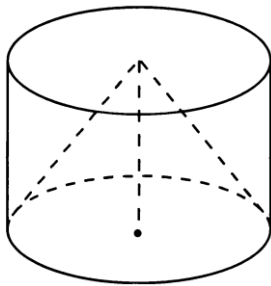
Если цилиндр и конус имеют общее основание и высоту, то  $V_k = \frac{1}{3}V_{\text{ц}}$

$$V_k = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10$$

Ответ: 10

Задание 10.

Объём конуса равен 25. Чему равен объём цилиндра с таким же основанием и высотой?



$$25 = \frac{1}{3}V_{\text{ц}}$$

$$V_{\text{ц}} = 75$$

Ответ: 75

### Практическая работа №68 «Простейшие задачи в координатах»

Задание 1.

Составить уравнение сферы радиуса  $R = 5$  с центром в начале координат.

Задание 2.

Написать уравнение сферы с центром в точке  $C(2; -3; 5)$  и радиусом, равным 6.

Задание 3.

Найти центр и радиус сферы  $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 100$ .

Задание 4

. Доказать, что уравнение  $x^2 + y^2 + z - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$  является уравнением сферы.

Задание 5

Напишите уравнение прямой проходящей через две данные точки  $C(2;5)$  и  $D(5;2)$

### Практическая работа №69 «Решение задач с помощью координат»

Задание 1

На оси  $OxOx$  найти точку, равноудаленную от точек  $A(2;-4;5)$  и  $B(-3;2;7)$ .

Задание 2

Найти косинус угла между векторами  $AB$  и  $AC$ .

$$A=(-4;4;4), B=(3;1;0), C=(-1;0;6).$$

Задание 3

Компланарны ли вектора  $a, b, c$ ?

$$a=(-3;2;1), b=(3;1;2), c=(3;-1;4)$$

Задание 4

Заданы два вектора в пространстве. Найти: а) их сумму; б) их разность; косинус угла между ними; в) их векторное произведение.  $a=(0;1;1), b=(-2;0;1)$ .

Задание 5

Найти ранг и базис системы векторов, перейти к новому базису. Записать разложения векторов по найденным базисам.

Задание 6

Компланарны ли вектора?

$$a=(-3;2;1), b=(3;1;2), c=(3;-1;4).$$

### Практическая работа №70 «Решение задач с помощью координат»

- 1 Даны треугольники  $ABC$ ,  $A_1B_1C_1$  и две точки  $O$  и  $P$  пространства. Известно, что  $\vec{OA} + \vec{OP} = \vec{OA_1}$ ,  $\vec{OB} + \vec{OP} = \vec{OB_1}$ ,  $\vec{OC} + \vec{OP} = \vec{OC_1}$ . Докажите, что стороны треугольника  $A_1B_1C_1$  соответственно равны и параллельны сторонам треугольника  $ABC$ .
- 2 При каких значениях  $k$  в равенстве  $\vec{a} = k\vec{b}$ , где  $\vec{b} \neq \vec{0}$ , векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ : а) коллинеарны; б) сонаправлены; в) противоположно направлены; г) являются противоположными?
- 3 Числа  $k$  и  $l$  не равны друг другу. Докажите, что если векторы  $\vec{a} + k\vec{b}$  и  $\vec{a} + l\vec{b}$  не коллинеарны, то: а) векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны; б) векторы  $\vec{a} + k_1\vec{b}$  и  $\vec{a} + l_1\vec{b}$  не коллинеарны при любых неравных числах  $k_1$  и  $l_1$ .
- 4 Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — середины сторон  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ , точка  $O$  — произвольная точка пространства. Докажите, что  $\vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ .
- 5 Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника  $ABCD$ , пересекаются в точке  $M$ . Точка  $O$  — произвольная точка пространства. Докажите, что справедливо равенство  $\vec{OM} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$ .
- 6 Диагонали параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что для любой точки  $M$  пространства справедливо неравенство  $MO < \frac{1}{4}(MA + MB + MC + MD)$ .
- 7 Три точки  $M$ ,  $N$  и  $P$  лежат на одной прямой, а точка  $O$  не лежит на этой прямой. Выразите вектор  $\vec{OP}$  через векторы  $\vec{OM}$  и  $\vec{ON}$ , если: а)  $\vec{NP} = 2\vec{MN}$ ; б)  $\vec{MP} = -\frac{1}{2}\vec{PN}$ ; в)  $\vec{MP} = k \cdot \vec{MN}$ , где  $k$  — данное число.

#### Практическая работа №71 «Повторение изученного»

1. Найти угол между векторами.
2. Найдите угол  $ACB$  в треугольнике  $ABC$ .
3. Найти углы, составляемые вектором с координатными осями.

Вариант 1.

1. 2.  $A(2; -3; 4)$ ;  $B(-2; 3; 7)$  и  $C(1; -2; -5)$ .
3. и  $B(9; -1; 4)$ .

Вариант 2.

1. 2.  $A(6; -1; 2)$ ;  $B(8; -2; 4)$  и  $C(-3; 9; 0)$ .
3. и  $B(-2; 3; 5)$ .

Вариант 3.

1. 2.  $A(9; -2; 0)$ ;  $B(12; -3; 5)$  и  $C(1; -2; 6)$ .
3. и  $B(-8; -2; 3)$ .

Вариант 4.

1. 2.  $A(7; -3; 1)$ ;  $B(5; 4; -2)$  и  $C(0; 1; -5)$ .

3. и  $B(4; -1; 2)$ .

Вариант 5.

1. 2.  $A(8; 0; -3)$ ;  $B(-2; 9; -7)$  и  $C(-3; -2; 4)$ .

3. и  $B(2; 4; -1)$ .

Вариант 6.

1. 2.  $A(2; -3; 5)$ ;  $B(0; 1; 7)$  и  $C(4; -3; 6)$ .

3. и  $B(-3; -1; 4)$ .

Вариант 7.

1. 2.  $A(11; -1; 5)$ ;  $B(10; 0; 4)$  и  $C(3; 6; 9)$ .

3. и  $B(-6; -2; 4)$ .

Вариант 8.

1. 2.  $A(-4; -3; 0)$ ;  $B(-11; 2; -5)$  и  $C(0; -2; 3)$ .

3. и  $B(5; 9; 2)$ .

Вариант 9.

1. 2.  $A(0; 1; 2)$ ;  $B(-2; 0; -1)$  и  $C(-3; -2; 5)$ .

3. и  $B(-3; 5; 8)$ .

Вариант 10.

1. 2.  $A(2; -3; 4)$ ;  $B(-2; 0; 7)$  и  $C(-3; -2; 5)$ .

3. и  $B(1; 6; 0)$ .

Вариант 11.

1. 2.  $A(2; -3; 4)$ ;  $B(3; 4; 5)$  и  $C(-1; -2; 0)$ .

3. и  $B(5; 0; 10)$ .

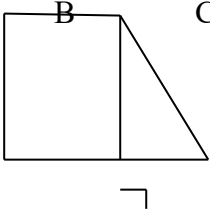
Вариант 12.

1. 2.  $A(9; -8; 6)$ ;  $B(-2; 0; 7)$  и  $C(0; -2; 6)$ .

3. и  $B(8; 4; 0)$ .

**Практическая работа №72 «Повторение изученного»**

| 1 вариант                                                                              | 2 вариант                                                                             | 3 вариант                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Задание № 1                                                                            | Задание № 1                                                                           | Задание № 1                                                                                            |
| На стороне ВС<br>параллелограмма ABCD<br>взята точка К так, что<br>$BK : KC = 1 : 4$ . | На стороне НК ромба<br>MHKC взята точка Е так,<br>что<br>$KE : HE = 1 : 6$ . Выразите | В параллелограмме<br>ABCD точка К – середина<br>AB, точка Р - середина ВС.<br>Выразите векторы AC, ВД, |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Выразите векторы AC, BK, CK, AK, KD через <math>AB = p</math> и <math>AD = k</math>. Выразите AS, если точка S – середина KD.</p> <p>Задание № 2</p> <p>В равнобедренной трапеции острые углы равны <math>45^\circ</math>, меньшее основание равно 5 см, а расстояние между основаниями 4 см. Найдите большее основание и среднюю линию трапеции.</p> | <p>векторы CH, KE, HE, CE, EM через <math>CK = p</math> и <math>CM = q</math>. Выразите CD, если точка D – середина ME.</p> <p>Задание № 2</p> <p>В равнобедренной трапеции острые углы равны <math>60^\circ</math>, большая сторона равна 10 см, а большее основание 15 см. Найдите меньшее основание и среднюю линию трапеции</p> | <p>AK, CP, CO, AP через векторы <math>AB = a</math>, <math>AD = b</math>.</p> <p>Задание № 2</p>  <p>ABCD – трапеция, <math>BC \parallel AD</math>,<br/> <math>CD = 6</math> см, угол D равен <math>30^\circ</math>,<br/> <math>BC = 4</math> см.<br/> Найдите среднюю линию трапеции.</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Список задач для самостоятельного решения

- Выяснить, каким числом (рациональным или иррациональным) является числовое значение выражения: 1)  $(\sqrt{8} - 3)(3 + 2\sqrt{2})$ ; 2)  $(\sqrt{27} - 2)(2 - 3\sqrt{3})$ ; 3)  $(\sqrt{50} + 4\sqrt{2})\sqrt{2}$ ;
- Найти абсолютную погрешность приближения 0,55 числа  $\frac{5}{8}$
- Запишите число в стандартном виде. Укажите его порядок и округлите мантиссу до тысячных. 1) 735274; 2) 32465103; 3) 6,0054;
- Найдите значение выражения:  $\left(2^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \sqrt[3]{6}$ .
- Вычислите:  $\frac{\left(0,216^{\frac{4}{9}}\right)^{\frac{3}{2}}}{0,09^{\frac{3}{4}} \cdot 0,027^{\frac{1}{6}}}$
- Вычислите:  $2^3 \cdot 2^{-2} + 2^{-3} \cdot 2^2 + 1,25$ .
- Найдите значение выражения:  $\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^{-1}}}\right)^{\frac{3}{4}}$  при  $x = 0,0625$
- Решить уравнения: 1)  $(x - 2)(x + 3) = 0$ ; 2)  $(x - 1)\sqrt{x + 4} = 0$ ;
- Найдите корень уравнения: 1)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} = 64$ ; 2)  $\left(\frac{1}{7}\right)^{x-3} = 49$ .
- С какой процентной ставкой необходимо вложить деньги в банк, если через 2 года вкладчик хочет получить 120000 рублей при первоначальном взносе 100000 рублей?
- Вычислить, используя определение и свойства логарифмов:  $5^{\log_5 16} - 11^{\log_{11} 12}$
- Решите уравнение:  $\log_7(2x^2 - 7x + 6) - \log_7(x - 2) = \log_7 x$
- Найдите значение выражения 1)  $3\operatorname{tg}45^\circ - \sqrt{3}\operatorname{ctg}60^\circ + 4\sin30^\circ$
- Доказать тождество  $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

15. Вычислить  $\cos(\alpha + \beta)$ , если  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$  и  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ,  $\cos \beta = -\frac{12}{13}$  и  $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

16. Преобразовать в произведение  $\sin 18^\circ + \sin 20^\circ$

17. Упростить выражение  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$

18. Вычислить 1)  $\cos 315^\circ + \sin 210^\circ + \operatorname{tg} 420^\circ$ ; 2)  $\sin \frac{13\pi}{6} - \cos \frac{11\pi}{6} + \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{4}$ .

19. Решить уравнение, разложив на множители его левую часть  $\sin x - \sin 3x = 0$

20. Решить неравенство 1)  $\cos x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ; 2)  $\sin 2x > \frac{1}{2}$

21. Вычислите  $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

22. Решить уравнение  $\sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

23. Найти все решения уравнения на заданном отрезке  $\cos \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$ ,  $[-6\pi; 6\pi]$

24. Найти область определения и область значений каждой из функций 1)

$y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ; 2)  $y = 2 + \frac{4}{x-3}$

25. Найдите точки максимума и минимума функции ее максимумы и минимумы  $y = -x^2 + 6x - 8$

26. Выяснить, является ли, четной, нечетной или не является ни четной, ни

нечетной функция: 1)  $y = x^3 - \frac{x}{2} + \sin x$ ; 2)  $y = x^2 + \cos 3x$ ;

27. Сколько различных двухзначных чисел с разными цифрами можно составить, используя цифры: 1) 1 и 5; 2) 0 и 6; 3) 2, 4 и 6; 4) 0, 1 и 8; 5) 3, 4, 5 и 6; 6) 0, 2, 3, 4 и 6?

28. Администрация города решила переименовать 3 улицы. К выбору были предложены 7 названий. Сколькими способами могут быть переименованы эти 3 улицы?

29. Сколькими способами можно разместить 6 различных автомобилей в семи одноместных боксах?

30. В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

31. Какова вероятность того, что в четырех сданных картах будет один туз и один король?

32. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины  $X$  по известному закону ее распределения, заданному таблично:

|   |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|
| X | 8   | 4   | 6   | 5   |
| P | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 |

33. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 150. Найти  $b_1$ , если  $q = 1/3$
34. Вычислить производную функции  $(12 - 7x)^3 \cdot (x^3 - 2x)^4$
35. С помощью производной найдите промежутки возрастания и убывания функции:  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$ .
36. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = x^3 + x^2$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .
37. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = \cos x$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x = -\frac{\pi}{6}$  и  $x = \pi$
38. Найдите первообразную  $f(x) = 5e^{2x+3} + 4x^2$
39. Решить уравнение  $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$
40. Решить систему уравнений  $\begin{cases} 3^{y+1} - 2^x = 5, \\ 4^x - 6 \cdot 3^y + 2 = 0. \end{cases}$
41. Решите уравнение:  $\sqrt{2x - x^2 + 8} + \sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{-x - 2} + 1$
42. Решить неравенство  $\frac{1}{x^2 - 8x + 7} > \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 8x + 7}$
43. Изобразите расстояние и угол между скрещивающимися диагоналями параллельных граней куба.
44. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найти угол между прямыми  $A_1 D$  и  $D_1 E$ , где  $E$  - середина ребра  $CC_1$
45. Дана прямая и две точки  $A$  и  $B$ , расположенные по одну сторону от неё. Найдите на прямой такую точку  $C$ , чтобы треугольник  $ABC$  имел наименьший периметр.
46. Найдите объем цилиндра с высотой, равной 5 см, если диагональ осевого сечения цилиндра образует с плоскостью основания угол 45 градусов.
47. Площадь сечения шара плоскостью, проведенной через конец диаметра под углом  $60^\circ$  к нему, равна  $75\text{ см}^2$ . Найдите площадь поверхности шара.
48. Найдите диаметр шара, объем которого равен  $36\pi\text{ см}^3$ .
49. Стороны треугольника равны 12 см и 9 см, а угол между ними  $30^\circ$ . найти площадь треугольника
50. Написать уравнение сферы с центром в точке  $C(2; -3; 5)$  и радиусом, равным 6.

**Проверка выполнения контрольных работ.** Контрольная работа проводится с целью результатов обучения и последующего анализа типичных ошибок и затруднений обучающихся в конце изучения темы или раздела. Согласно календарно-тематическому плану дисциплины предусмотрено проведение следующих контрольных работ:

- Контрольная работа №1 по разделу «Алгебра»
- Контрольная работа №2 по разделу «Основы тригонометрии»
- Контрольная работа №3 по разделу «Функции, их свойства и графики»
- Контрольная работа №4 по разделу «Комбинаторика»
- Контрольная работа №5 по разделу «Элементы теории вероятностей и статистики»
- Контрольная работа №6 по теме «Производная и ее применение»
- Контрольная работа №7 по теме «Интеграл и его применение»
- Контрольная работа №8 по разделу «Уравнения и неравенства»
- Контрольная работа №9 по разделу «Прямые и плоскости в пространстве»
- Контрольная работа № 10 по разделу «Многогранники и круглые тела»

### Контрольная работа №1 Вариант 1

1. Запишите числа в виде бесконечных периодических дробей:  $\frac{7}{25}$ ,  $\frac{41}{30}$
2. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь:  $1,(7); -5,3(23)$ .
3. Вычисление:  $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$
4. Вычислите:  $(2^3\sqrt{2})^6$
5. Вычислите:  $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}$
6. Представьте в виде степеней с рациональным показателем  $\frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}{x}$ .
7. Найдите значение выражений  $\sqrt{a^2} + \sqrt{16b^2} + 4b$  при  $a = -2000$ ,  $b = -3000$
8. Расположите числа в порядке возрастания  $\left(\frac{1}{3}\right)^2; \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}; 9^{-\frac{1}{3}}; 3^{\frac{3}{4}}; \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$
9. Упростите выражение  $\frac{x-16}{x+x^{0,5}+1} : \frac{x^{0,5}+4}{x^{1,5}-1}$  и найдите его значение при  $x = 2,25$

### Вариант 2

1. Запишите числа в виде бесконечных периодических дробей:  $\frac{2}{7}$ ,  $\frac{8}{15}$
2. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь:  $4,(8); -2,6(93)$ .
3. Вычислите:  $810000^{\frac{1}{4}}$
4. Вычислите:  $(-3\sqrt{2})^4$
5. Вычислите:  $\sqrt[4]{144} \cdot \sqrt[4]{9}$
6. Представьте в виде степеней с рациональным показателем  $\frac{\sqrt{x^5 \cdot \sqrt{x}}}{x}$ .
7. Найдите значение выражений  $\sqrt{9a^2} + \sqrt{b^2} + 3a$  при  $a = -100$ ,  $b = -2000$
8. Расположите числа в порядке возрастания  $2^{-\frac{3}{4}}; 2; \frac{1}{2}; 2^{\frac{2}{3}}; 2^{-\frac{4}{3}}$
9. Упростите выражение  $\frac{x-9}{x-x^{0,5}+1} : \frac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}+1}$  и найдите его значение при  $x = 6,25$

### Вариант № 1

1. Вычислить  $\log_3 81$
2. Вычислить  $\log_{169} 13$
3. Вычислить  $\log_4 \log_3 9$
4. Вычислить  $\frac{\lg 125}{\lg 5}$
5. Вычислить  $\log_6 12 - \log_6 3 + \log_6 9$
6. Вычислить  $2\log_2 6 + \log_2 \frac{35}{9} - \log_2 35$
7. Вычислить  $\log_3 2 - \log_3 2 \cdot \log_2 6 + \log_3 6$
8. Вычислить  $\lg 7(\log_7 15 + \log_7 4 - \log_7 6)$



9. Вычислить  $0,3^{2\log_{0,3} 4+2}$
10. Решите уравнение  $\log_5(7-x) = 2$ .
11. Найдите корень уравнения  $\log_5(x-1) = \log_5(2x-3)$ .
12. Найдите корень уравнения  $2\log_5^2 x - 7\log_5 x + 3 = 0$ .
13. Найдите корень уравнения  $\log_3(7-x) = \log_3(1-x) + 1$
14. Найдите корень уравнения  $2\log_4(3x-5) = \log_2(15-x)$

### Вариант №2

1. Вычислить  $\log_5 125$
2. Вычислить  $\log_{25} 5$
3. Вычислить  $\log_3 \log_4 64$
4. Вычислить  $\frac{\lg 256}{\lg 4}$
5. Вычислить  $\log_3 6 + \log_3 4 + \log_3 \frac{9}{24}$
6. Вычислить  $2\log_6 27 - \log_6 81 - 2\log_6 18$
7. Вычислить  $2\log_2 8 + \log_2 \frac{25}{16} - \log_2 25$
8. Вычислить  $\lg 3(\log_3 25 - \log_3 2 + \log_3 8)$
9. Вычислить  $9^{\log_9 2 + \log_{5\frac{1}{25}}}$
10. Решите уравнение  $\log_6(-3+x) = 1$
11. Решите уравнение  $\log_6(x+17) = \log_6(2x+7)$
12. Решите уравнение  $\log_2(3x+8) = \log_2(3-x) + 1$
13. Решите уравнение  $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$
14. Решите уравнение  $\log_6(18-x) = 4\log_{36} 2$

### Вариант №3

1. Вычислить  $\log_4 \frac{1}{16}$
2. Вычислить  $\log_{81} 9$
3. Вычислить  $\log_2 \log_4 256$
4. Вычислить  $\frac{\lg 32}{\lg 2}$
5. Вычислить  $\log_4 5 + \log_4 25 + \log_4 \frac{2}{125}$
6. Вычислить  $\log_2 10 - \log_2 5 + \log_2 8$
7. Вычислить  $2\log_7 32 - \log_7 256 - 2\log_7 14$
8. Вычислить  $\lg 2(\log_2 75 - \log_2 15 + \log_2 20)$
9. Вычислить:  $4^{\log_2 9} + 9$
10. Решите уравнение  $\log_7(-5-x) = 3$

11. Решите уравнение  $\log_{17}(4x - 9) = \log_{17} x$
12. Решите уравнение  $2 \log_6^2 x + 5 \log_6 x + 2 = 0$ .
13. Решите уравнение  $\log_{26}(2x - 1) - \log_{26} x = 0$
14. Решите уравнение  $11^{\log_{11}(x+1)} = 2$ .

#### **Вариант №4**

1. Вычислить  $\log_5 \frac{1}{25}$
2. Вычислить  $\log_{121} 11$
3. Вычислить  $\log_5 \log_{32} 2$
4. Вычислить  $\frac{\lg 27}{\lg 3}$
5. Вычислить  $\log_5 10 + \log_5 50 - \log_5 4$
6. Вычислить  $\log_2 8 - \log_2 3 + \log_2 12$
7. Вычислить  $3 \log_2 4 + \log_2 \frac{15}{16} - \log_2 15$
8. Вычислить  $\lg 4(\log_4 35 + \log_4 2 - \log_4 7)$
9. Вычислить  $25^{\log_5 3 - \log_{25} 27}$
10. Решите уравнение  $\log_2(6 - x) = 5$
11. Найдите корень уравнения  $\log_2(x + 3) = \log_2(3x - 15)$
12. Решите уравнение  $\log_5 x = -\log_{0,2}(14 - x)$
13. Решите уравнение  $\log_6(x + 17) = \log_6(2x + 7)$
14. Решите уравнение  $3 \log_4^2 x - 7 \log_4 x + 2 = 0$

#### **Контрольная работа №2**

##### **1 вариант**

1. а) перевести градусы в радианы:  $155^\circ$ ,  $55^\circ$ ;  
 б) перевести радианы в градусы  $\frac{2\pi}{7}$ ,  $\frac{\pi}{15}$ .
2. Найдите  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$  и  $\alpha$  лежит во 2 четверти.
3. Вычислите:  
 а)  $\sqrt{3} \sin 60^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{ctg} 135^\circ + \operatorname{ctg} 90^\circ$ ;  
 б)  $\cos \frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ . в)  $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) + 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$
4. Решите уравнение:  $\sqrt{2} \sin 3x - 1 = 0$ .
5. Решите уравнение:  $2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$
6. Упростите выражение:  
 а)  $\frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\sin^2(-\alpha)}$ ,  $\alpha \neq \pi, n \in \mathbb{Z}$ ;  
 б)  $\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta$  в)  $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - 2 \sin(\pi - \alpha)}{\sin(\alpha + \pi)}$

Г)  $\sin(3\pi + \alpha) + \cos(\pi - \alpha) - \sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)$ .

7. Решите уравнение:  $\cos 3x \cos 5x = \sin 3x \sin 5x$

### 2 вариант

1. а) перевести градусы в радианы:  $175^\circ$ ,  $75^\circ$ ;

б) перевести радианы в градусы  $\frac{2\pi}{9}$ ,  $\frac{\pi}{12}$ .

2. Найти  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$  и  $\alpha$  лежит в 3 четверти.

3. Вычислите:

а)  $\sin 30^\circ + \sqrt{6} \cos 45^\circ \sin 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 150^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ$ ;

б)  $\cos \frac{\pi}{3} - \sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{4} + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ . в)  $4 \sin^2 120^\circ - 2 \cos 600^\circ + \sqrt{27} \operatorname{tg} 660^\circ$ .

4. Решите уравнение:  $2 \cos 3x - \sqrt{2} = 0$ .

5. Решите уравнение:  $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$

6. Упростите выражение:

а)  $\frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha}$ ,  $\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;

б)  $\sin(2\pi + \alpha) + \cos(\pi + \alpha) + \sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)$ .

в)  $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ ;

г)  $\frac{\sin(-\alpha) + \cos(\pi + \alpha)}{1 + 2 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cos(-\alpha)}$ .

7. Решите уравнение:  $\sin 6x \cos x + \cos 6x \sin x = \frac{1}{2}$

### 3 вариант

1. а) перевести градусы в радианы:  $195^\circ$ ,  $95^\circ$ ;

б) перевести радианы в градусы  $\frac{3\pi}{7}$ ,  $\frac{2\pi}{15}$ .

2. Найдите  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$  и  $\alpha$  лежит во 2 четверти.

3. Вычислите:

а)  $\sqrt{2} \sin 45^\circ - \cos 30^\circ \sin 60^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ \operatorname{tg} 135^\circ - \operatorname{tg} 0^\circ$ ;

б)  $\sin \frac{\pi}{3} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} - \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$ . в)  $\cos\left(-\frac{25\pi}{3}\right) - 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$ .

4. Решите уравнение:  $2 \sin 3x - 1 = 0$ .

5. Решите уравнение:  $2 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0$ .

6. Упростите выражение:

а)  $\frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha}$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;

б)  $\sin(\pi + \alpha) + \cos(2\pi + \alpha) - \sin(-\alpha) - \cos(-\alpha)$ .

в)  $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ ;

г)  $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \sin(2\pi + \alpha)}{2\cos(\alpha)\sin(-\alpha) + 1}$ .

7. Решите уравнение:  $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 1$

#### 4 вариант

1. а) перевести градусы в радианы:  $145^\circ$ ,  $15^\circ$ ;

б) перевести радианы в градусы  $\frac{5\pi}{9}$ ,  $\frac{\pi}{7}$ .

2. Найти  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$  и  $\alpha$  лежит в 3 четверти.

3. Вычислите:

а)  $\cos 60^\circ - \sqrt{6} \cos 30^\circ \sin 45^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ \operatorname{tg} 150^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ$ ;

б)  $\sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4} - \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$ . в)  $2\sin 870^\circ + \sqrt{12} \cos 570^\circ - \operatorname{tg}^2 60^\circ$ .

4. Решите уравнение:  $2\cos 3x - 1 = 0$ .

5. Решите уравнение:  $2\operatorname{ctg}^2 x - 3\operatorname{ctg} x - 2 = 0$ .

6. Упростите выражение:

а)  $\frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{\cos^2(-\alpha)}$ ,  $a \neq \frac{\pi}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z}$ .

б)  $\sin(\pi - \alpha) + \cos(3\pi - \alpha) + \sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)$ .

в)  $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin 2x}$

г)  $\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)$

7. Решите уравнение:  $\sin 3x \cos 5x - \cos 3x \sin 5x = 0,5$

#### Контрольная работа №3

##### Вариант 1

1. По графику функции ответьте на вопросы:

1) Каковы промежутки возрастания функции?

2) Каковы промежутки убывания функции?

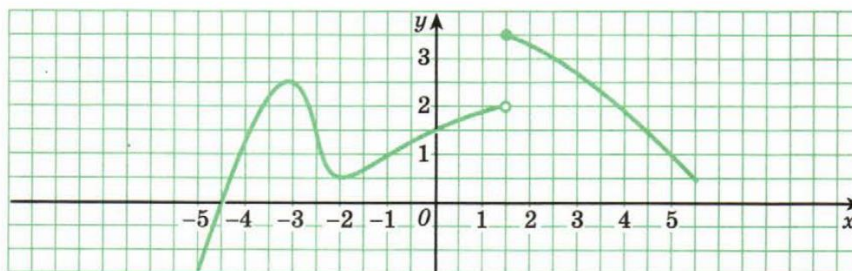
3) Назовите точки максимума и минимума функции. Какие значения принимает функция в этих точках?

4) Каковы наибольшее и наименьшее значения этих функций на отрезке  $[-2; 2]$ ?

5) В каких точках функция не является непрерывной и каковы значения функции в этих точках?

6) На каких промежутках функция непрерывна?

7) Функция, изображенная на графике, является четной или нечетной?

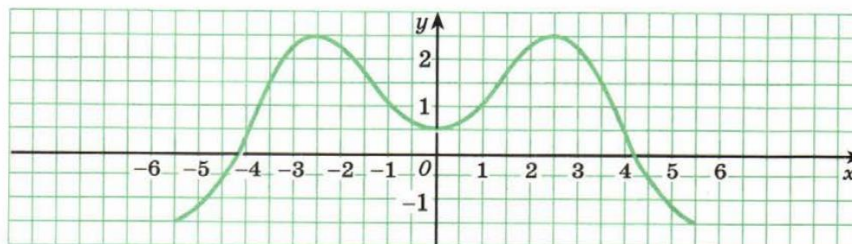


2. Докажите четность (нечетность) функции: а)  $y = x^3 - 3x$ ; б)  $y = \frac{5x^3}{1 - x^2}$ .

3. Исследуйте функцию и постройте ее график  $y = (x - 2)^3 - 1$ .
4. Найдите область определения функции:  $y = \frac{2}{\cos^2 x}$ .
5. Найдите область значений функции:  $y = 2 \cos x \operatorname{tg} x$ .
6. В одной системе координат схематически постройте графики функций  $y = \log_{\frac{1}{4}} x$  и  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ .
7. Решить уравнение: а)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-3x} = 25$ , б)  $4^x + 2^x - 20 = 0$ .

### Вариант 2

1. По графику функции ответьте на вопросы:
  - 1) Каковы промежутки возрастания функции?
  - 2) Каковы промежутки убывания функции?
  - 3) Назовите точки максимума и минимума функции. Какие значения принимает функция в этих точках?
  - 4) Каковы наибольшее и наименьшее значения этих функций на отрезке  $[-2; 2]$ ?
  - 5) В каких точках функция не является непрерывной и каковы значения функции в этих точках?
  - 6) На каких промежутках функция непрерывна?
  - 7) Функция, изображенная на графике, является четной или нечетной?



2. Докажите четность (нечетность) функции: а)  $y = x^4(x^2 + 2)$ ; б)  $y = \frac{|x| + 2}{x^2}$ .
3. Исследуйте функцию и постройте ее график  $y = 4 - (x + 2)^4$ .
4. Найдите область определения функции:  $y = \frac{1}{1 + 2 \sin 2x}$ .
5. Найдите область значений функции:  $y = 2 + 3 \cos 5x$ .
6. В одной системе координат схематически постройте графики функций  $y = \log_4 x$  и  $y = 4^x$ .
7. Решить уравнение: а)  $0,1^{2x-3} = 10$ , б)  $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$ .

### Контрольная работа №4

#### Вариант 1

1. В ящике лежат 20 шариков, 12 из которых черные. Какова вероятность вытащить наугад:
  - а) черный шарик?
  - б) три черных шарика за один раз?
2. Дана выборка результатов внешнего оценивания по математике нескольких человек (в баллах): 167, 197, 167, 145, 145, 180, 150, 195, 167, 137. Составить таблицу распределения элементов выборки по частотам и относительным частотам. Найти моду, медиану, среднее значение выборки. Построить полигон частот.
3. В коробке лежат карточки, на которых записаны буквы слова ОСНОВАТЕЛЬНОСТЬ. Какова вероятность того, что наугад взятой карточке будет записана буква: а) О; б) согласная буква?

4. Найдите  $A \cup B$  и  $A \cap B$ , если  $A=\{2;3;7\}$ ,  $B=\{5;7;3\}$
5. В коробке лежат 4 голубых, 3 красных, 9 зеленых и 6 желтых шариков. Какова вероятность того, что выбранный шарик будет не зеленый?
6. Какова вероятность того, что при подбрасывании игральной кости выпадет не более трех очков?
7. На десяти карточках записаны натуральные числа от 1 до 10. Наугад берут две из них. Какова вероятность того, что модуль разности чисел на карточках равен 3?
8. Решить уравнение:  $C^2_x = 153$

### **Вариант 2**

1. В вазе лежат 15 конфет, пять из которых шоколадные. Какова вероятность вытащить наугад: а) шоколадную конфету? б) три шоколадные конфеты за один раз?
2. Дана выборка количества новорожденных в городе А на протяжении нескольких дней: 56, 45, 51, 46, 48, 50, 46, 48, 49, 51. Найти моду, медиану, среднее значение выборки. Построить полигон частот.
3. В коробке лежат 30 карточек, на которых записаны числа от 1 до 30. Какова вероятность того, что на наугад взятой карточке будет записано число, которое: а) кратно 7; б) не кратно ни числу 2, ни числу 3, ни числу 5?
4. Найдите  $A \cup B$  и  $A \cap B$ , если  $A=\{2;3;7\}$ ,  $B=\{5;7;3\}$
5. Мальчик забыл последнюю цифру семизначного номера телефона друга. Какова вероятность того, что он набрал верный номер.
6. Бросают игральную кость один раз. Какова вероятность того, что выпадет число, не меньше двух?
7. На карточках записаны числа от 1 до 12. Наугад берут две из них. Какова вероятность того, что сумма чисел на карточках будет равна 12?
8. Решить уравнение:  $A^2_x = 20$

## **Контрольная работа №5**

### **Вариант 1**

**A1.** Случайная величина  $X$  принимала значения: 1, 0, 4, 3, 1, 5, 3, 2, 4, 3. Составьте таблицу распределения значений случайной величины  $X$  по частотам ( $M$ ) и относительным частотам ( $W$ ). Постройте полигон относительных частот значений величины  $X$ .

**A2.** Найдите моду, медиану, среднее и размах выборки значений случайной величины:

а) 3, 5, 6, 4, 4, 5, 2, 4, 3;

б) 7, 4, 6, 5, 6, 7, 5, 6;

в) 3,5; 3,8; 4,1; 2,8; 3,7; 4,4; 2,9.

**B1.** В таблице записаны размеры обуви 20 девочек IX класса:

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 34 | 34 | 35 | 35 | 35 | 36 | 36 | 36 | 36 | 36 |
| 37 | 37 | 37 | 37 | 37 | 38 | 38 | 39 | 39 | 39 |

Построить таблицы распределения частот и относительных частот. Построить полигон частот.

**В2.** Отмечая время (с точностью до минут), которое токари бригады затратили на обработку одной детали, получили такой ряд данных: 30, 32, 32, 38, 36, 31, 32, 38, 35, 36, 32, 40, 42, 36, 33, 35, 32, 40, 38. Составить таблицы распределения по частотам и относительным частотам значений случайной величины. Найдите размах, среднее, моду и медиану для данного ряда.

**С1.** Найти дисперсию выборки: 23, 29, 25, 26, 22.

### **Вариант 2**

**А1.** Случайная величина  $X$  принимала значения: 2, 1, 2, 3, 4, 3, 3, 2, 3, 4. Составьте таблицу распределения значений случайной величины  $X$  по частотам ( $M$ ) и относительным частотам ( $W$ ). Постройте полигон частот значений величины  $X$ .

Постройте полигон частот значений величины  $X$ .

**А2.** Найдите моду, медиану, среднее и размах выборки значений случайной величины:

а) 7, 4, 6, 5, 6, 7, 5, 6;

б) 3, 5, 6, 4, 4, 5, 2, 4, 3;

в) 34, 35, 34, 37, 38, 37, 37.

**В1.** В таблице записаны рост 20 девочек IX класса:

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 153 | 153 | 154 | 154 | 154 | 154 | 155 | 155 | 155 | 155 |
| 155 | 156 | 156 | 157 | 157 | 157 | 158 | 158 | 159 | 160 |

Построить таблицы распределения частот и относительных частот. Построить полигон частот.

**В2.** В организации вели ежедневный учёт поступивших в течение месяца писем. В результате получили такой ряд данных: 39, 43, 40, 0, 56, 38, 24, 21, 35, 38, 0, 58, 31, 49, 38, 25, 34, 0, 52, 40, 42, 40, 39, 54, 0, 64, 44, 50, 38, 37, 32. Составить таблицы распределения по частотам и относительным частотам значений случайной величины. Найдите размах, среднее, моду и медиану для данного ряда.

**С1.** Найти дисперсию выборки: 23, 29, 25, 26, 22.

### **Контрольная работа №6**

#### **Вариант 1**

1. Найти производную функции

а)  $x^8$ ;      б)  $x^{-11}$ ;      в)  $x^{\frac{2}{3}}$ ;      г)  $\frac{1}{\sqrt[8]{x^3}}$ ;      д)  $(1-3x)^4$ ;      е)  $(-5x)^3$ .

2. Найти  $f'(x_0)$

а)  $f(x) = \sqrt{3-2x}$ ,  $x_0 = -11$ ;      б)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3x^2$ ,  $x_0 = \frac{1}{4}$ .

3. Найти производную функции

а)  $x^3 + \frac{1}{x} - 1$ ;      б)  $(x+7) \cdot x^2$ ;      в)  $\frac{2x+3}{2-3x}$ .

4. Найти производную функции

а)  $e^x + \sin x$ ;      б)  $\cos x - \log_5 x$ ;      в)  $3^{2x+1}$ ;      г)  $\cos(x^2-3)$ .

5. Найти промежутки возрастания и убывания функции  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ .

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$  на отрезке  $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ .

### Вариант 2

1. Найти производную функции

а)  $x^9$ ;      б)  $x^{-12}$ ;      в)  $x^{\frac{4}{5}}$ ;      г)  $\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}$ ;      д)  $(2-5x)^4$ ;      е)  $(-2x)^5$

2. Найти  $f'(x_0)$

а)  $f(x) = \sqrt{1-5x}$ ,  $x_0 = -3$ ;      б)  $f(x) = 4\sqrt{x} + \frac{1}{10x}$ ,  $x_0 = \frac{1}{9}$ .

3. Найти производную функции

а)  $x^2 - \frac{1}{x} + 3$ ;      б)  $(x-6) \cdot x^3$ ;      в)  $\frac{2x+3}{3-2x}$ .

4. Найти производную функции

а)  $\cos x + 3^x$ ;      б)  $\ln x - \sin x$ ;      в)  $2^{3x-1}$ ;      г)  $\sin(x^3+2)$ .

5. Найти промежутки возрастания и убывания функции  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ .

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$  на отрезке  $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ .

### Контрольная работа №7

#### Вариант 1

1. Показать, что функция  $F(x)$  – первообразная функции  $f(x)$  на всей числовой прямой

а)  $F(x) = \frac{x^4}{4}$ ,  $f(x) = x^3$ ;      б)  $F(x) = \frac{2}{5}x^5$ ,  $f(x) = 2x^4$ .

2. Найти все первообразные данной функции

а)  $3x^3 - 4x^2$ ;      б)  $\frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}$ ;      в)  $2\sin x + x^2$ ;      г)  $4e^x + x^3$ ;

3. Для функции  $f(x)$  найти первообразную, график которой проходит через точку  $M$ .

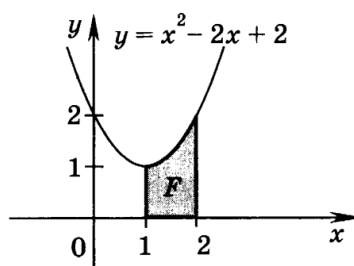
а)  $f(x) = -\frac{1}{x^3}$ ,  $M(1; -2)$ ;      б)  $f(x) = \sin x - \cos x$ ,  $M(\frac{\pi}{2}; 1)$ .

4. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми  $x=a$ ,  $x=b$ , графиком функции  $y=f(x)$  и осью  $Ox$ :  $a=0$ ,  $b=2$ ,  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ .

5. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:  $y = 3x + 18 - x^2$ ,  $y = 0$ .

6. Вычислить площадь фигуры  $F$ , изображенной на рисунке.





### Вариант 2

1. Показать, что функция  $F(x)$  – первообразная функции  $f(x)$  на всей числовой прямой

а)  $F(x) = 2x^5$ ,  $f(x) = 10x^4$ ;

б)  $F(x) = \frac{x^6}{3}$ ,  $f(x) = 2x^5$ .

2. Найти все первообразные данной функции

а)  $2x^4 - 5x$ ; б)  $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4}$ ; в)  $3\cos x - x$ ; г)  $5e^x - 2x^4$ ;

3. Для функции  $f(x)$  найти первообразную, график которой проходит через точку  $M$ .

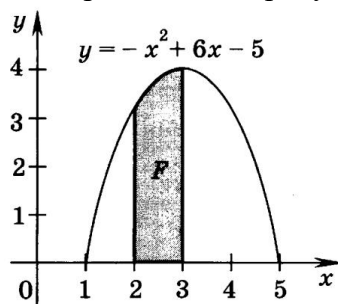
а)  $f(x) = \frac{2}{x^4}$ ,  $M(2; -1)$ ;

б)  $f(x) = \cos x + \sin x$ ,  $M(\pi; -2)$ .

4. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми  $x=a$ ,  $x=b$ , графиком функции  $y=f(x)$  и осью  $Ox$ :  $a=1$ ,  $b=3$ ,  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ .

5. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:  $y = 5x + 14 - x^2$ ,  $y = 0$ .

6. Вычислить площадь фигуры  $F$ , изображенной на рисунке.



### Контрольная работа №8

#### Вариант 1

1. Решить неравенство:

а.  $\frac{30x-9}{x-2} \geq 25(x+2)$

б.  $\frac{4x-x^2}{3+2x} \leq 0$

2. Решить иррациональное уравнение:  $\sqrt{x+8} - x + 2 = 0$

3. Решить иррациональное неравенство:  $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq x - 1$

4. Решить показательное и логарифмическое уравнение:

а.  $\log_3(2x+1) = \log_3 13 + 1$

б.  $4^{3x} + 2 = 9 \cdot 2^{3x}$

5. Решить показательное неравенство:

а.  $32^{2x+3} < 0,25$

б.  $\left(\frac{1}{9}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \geq 36$

6. Решить логарифмическое неравенство:  $\log_5(4x+1) > -1$

7. Решить систему уравнений:

$$\text{a. } \begin{cases} 2y - 3x = 6, \\ 2x + y = \log_3 135 - \log_3 5 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} x - y = 6, \\ x^3 - y^3 = 126. \end{cases}$$

### Вариант 2

1. Решить неравенство:

$$\text{a. } x > \frac{1}{x-1}$$

$$\text{b. } \frac{4x-9x^2}{10-x} \geq 0$$

2. Решить иррациональное уравнение:  $\sqrt{2x^2 - 4x} = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$

3. Решить иррациональное неравенство:  $\sqrt{x+3} > x+1$

4. Решить показательное уравнение:

$$\text{a. } 9 \cdot 81^{1-2x} = 27^{2-x}$$

$$\text{b. } 4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} = 4$$

5. Решить показательное неравенство:

$$\text{a. } \left(\frac{3}{4}\right)^{2+4x} \geq 0,75^{1-8x}$$

$$\text{b. } 3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 < 0$$

6. Решить логарифмическое неравенство:  $2\lg 6 - \lg x > 3\lg 2$

7. Решить систему уравнений:

$$\text{a. } \begin{cases} 2x - y = 1, \\ \frac{3^y}{27} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0, \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1. \end{cases}$$

### Вариант 3

1. Решить неравенство:

$$\text{a. } \frac{4x^2+8x-5}{x+1} < 0$$

$$\text{b. } \frac{(x-5)(2x+7)}{4-x} \geq 0$$

2. Решить иррациональное уравнение:  $4\sqrt{x+1} = 2x+2$

3. Решить иррациональное неравенство:  $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$

4. Решить показательное и логарифмическое уравнение:

$$\text{a. } 0,3^{6x-1} - 0,3^{6x} = 0,7$$

$$\text{b. } -\log_7(5-x) = \log_7 2 - 1$$

5. Решить показательное неравенство:

$$\text{a. } 2^{x-1} + 2^x \geq 2^{x+1} - 4$$

$$\text{b. } 3^{2x-1} + 3^{2x} < 108$$

6. Решить логарифмическое неравенство:  $2\lg 6 - \lg x > 3\lg 2$

7. Решить систему уравнений:

$$\text{a. } \begin{cases} 2x + y = 15, \\ x - 3y = \log_2 144 - \log_2 9 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} 3(x+1) + 2(y-2) = 20, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

### Вариант 4

1. Решить неравенство:

$$\text{a. } x + 2 < \frac{4}{1-x}$$

$$\text{b. } \frac{3x^2+4x-4}{8+15x} < 0$$

2. Решить иррациональное уравнение:  $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$

3. Решить иррациональное неравенство:  $\sqrt{4x-8} \geq x-5$

4. Решить показательное уравнение:

$$a. 2^x + 2^{x+2} = 20$$

$$b. 7^{x+2} - 14 \cdot 7^x = 5$$

5. Решить показательное неравенство:

$$a. 2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}} \quad b. 8 \cdot 4^x - 6 \cdot 2^x + 1 \geq 0$$

6. Решить логарифмическое неравенство:  $\log_5(4x+1) > -1$

7. Решить систему уравнений:

$$a. \begin{cases} 2y - x = 6, \\ 9^{2x+y} = 3^{2-3y} \end{cases} \quad b. \begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$$

### Контрольная работа №9

#### I вариант

№1. Основание  $AD$  трапеции  $ABCD$  лежит в плоскости  $\alpha$ . Через точки  $B$  и  $C$  проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость  $\alpha$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно.

а) Каково взаимное положение прямых  $EF$  и  $AB$ ?

б) Чему равен угол между прямыми  $EF$  и  $AB$ , если  $\angle ABC = 150^\circ$ ? Поясните ответ.

№2. Прямые  $a$  и  $b$  лежат в параллельных плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$ . Могут ли эти прямые быть:

а) параллельными; б) скрещивающимися?

Сделайте рисунок для каждого возможного случая.

№3. Через точку  $O$ , лежащую между параллельными плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , проведены прямые  $l$  и  $m$ . Прямая  $l$  пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  в точках  $A_1$  и  $A_2$  соответственно,

прямая  $m$  – в точках  $B_1$  и  $B_2$ . Найдите длину отрезка  $A_2B_2$ , если  $A_1B_1 = 12$  см,  $B_1O : OB_2 = 3 : 4$ .

№4. Диагональ куба равна 6 см. Найдите:

а) ребро куба;

б) косинус угла между диагоналями куба и плоскостью одной из его граней.

№5. Из точки  $A$  к плоскости  $\alpha$  проведены наклонные  $AB$  и  $AC$ , образующие с плоскостью  $\alpha$  равные углы. Известно, что  $BC = AB$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .

#### II вариант

№1. Треугольники  $ABC$  и  $ADC$  лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону  $AC$ . Точка  $P$  – середина стороны  $AD$ , а  $K$  – середина стороны  $DC$ .

а) Каково взаимное положение прямых  $PK$  и  $AB$ ?

б) Чему равен угол между прямыми  $PK$  и  $AB$ , если  $\angle ABC = 40^\circ$  и  $\angle BCA = 80^\circ$ ? Поясните ответ.

№2. Прямые  $a$  и  $b$  лежат в пересекающихся плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$ . Могут ли эти прямые быть:

а) параллельными; б) скрещивающимися?

Сделайте рисунок для каждого возможного случая.

№3. Через точку  $O$ , не лежащую между параллельными плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , проведены прямые  $l$  и  $m$ . Прямая  $l$  пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  в точках  $A_1$  и  $A_2$  соответственно,

прямая  $m$  – в точках  $B_1$  и  $B_2$ . Найдите длину отрезка  $A_1B_1$ , если  $A_2B_2 = 15$  см,  $OB_1 : OB_2 = 3 : 5$ .

**№4.** Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат; диагональ параллелепипеда равна  $2\sqrt{6}$  см, а его измерения относятся как 1:12 Найдите:

- измерения параллелепипеда;
- синус угла между диагональю параллелепипеда и плоскостью его основания.

**№5.** Из точки  $A$  к плоскости проведены перпендикуляр  $AO$  и две равные наклонные  $AB$  и  $AC$ . Известно, что  $BC = BO$ . Найдите углы треугольника  $BOC$ .

### Контрольная работа №10

#### Вариант 1

1. Основанием для прямой призмы является равнобедренная трапеция, длины боковых сторон которой равны по 13 см, основания 11 см и 21 см, площадь диагонального сечения призмы равна  $180 \text{ см}^2$ . Найдите высоту призмы.

- А. 16 см.      Б. 12 см.      В. 9 см.

2. Точка  $M$  удалена от каждой вершины квадрата на 10 см. Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости квадрата, если его сторона равна  $6\sqrt{2}$  см.

- А. 8 см.      Б. 9 см.      В. 10 см.

3. Через точку пересечения диагоналей ромба  $ABCD$  проведен к его плоскости перпендикуляр  $MO$  длиной 12 см. Диагонали ромба равны 18 см и 10 см. Найдите длину большей наклонной.

- А. 15 см.      Б. 12 см.      В. 10 см.

4. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения как  $\pi\sqrt{3} : 4$ . Найдите угол между диагональю осевого сечения цилиндра и плоскостью основания.

- А.  $60^\circ$ .      Б.  $45^\circ$ .      В.  $30^\circ$ .

5. Высота конуса равна 10 см. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в  $60^\circ$ , если плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол  $30^\circ$ .

- А.  $100 \text{ см}^2$ .      Б.  $200 \text{ см}^2$ .      В.  $500 \text{ см}^2$ .

6. Найдите объем куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , если  $DE = 1$  см, где  $E$  – середина ребра  $AB$ .

- А.  $\frac{8}{\sqrt{5}} \text{ см}^3$ .      Б.  $\frac{8}{5\sqrt{5}} \text{ см}^3$ .      В.  $1,5 \text{ см}^3$ .

7. Высота цилиндра на 12 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна  $288\pi \text{ см}^2$ . Найдите радиус основания цилиндра.

- А. 6 см.      Б. 9 см.      В. 16 см.

8. В цилиндр вписана правильная  $n$ -угольная призма. Найти отношение объемов призмы и цилиндра, если  $n = 4$ .

- А.  $\frac{2}{\pi}$ .      Б. 5.      В.  $\frac{4}{3\pi}$ .

9. Основанием пирамиды  $DABC$  является прямоугольный треугольник  $ABC$ , у которого гипотенуза  $AB$  равна 29 см, катет  $AC$  равен 21 см. Ребро  $DA$  перпендикулярно к плоскости основания и равно 20 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

- А.  $580 \text{ см}^2$ .      Б.  $650 \text{ см}^2$ .      В.  $790 \text{ см}^2$ .

#### Вариант 2

1. Диагональ правильной четырехугольной призмы составляет с боковой гранью угол  $30^\circ$ . Найдите объем призмы, если сторона основания  $\sqrt{2}$  см.

- А.  $2 \text{ см}^3$ .      Б.  $4 \text{ см}^3$ .      В.  $5\sqrt{2} \text{ см}^3$ .

2. Из точки  $A$  проведены к плоскости наклонные  $AB$  и  $AC$  длиной 12 см и 18 см. Найдите длины проекций наклонных, если одна из них на 10 см больше другой.

- А. 14 см и 4 см.      Б. 6 см и 9 см.      В. 10 см и 20 см.
3. Из точки  $M$  к плоскости проведены наклонные  $MA$  и  $MB$  длиной 10 см и 17 см. Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости, если длины проекций пропорциональны числам 2 и 5.  
А. 6 см.      Б. 7 см.      В. 8 см.
4. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48 см. Угол между этой диагональю и образующей цилиндра равен  $60^\circ$ . Найдите радиус цилиндра.  
А. 12 см.      Б.  $12\sqrt{3}$  см.      В. 14 см.
5. Высота конуса равна 8 дм. На каком расстоянии от вершины конуса надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания?  
А.  $2\sqrt{3}$  дм.      Б. 5 дм.      В.  $4\sqrt{2}$  дм.
6. Какое количество нефти (в тоннах) вмещает цилиндрическая цистерна диаметром 18 м и высотой 7 м, если плотность нефти  $0,85 \text{ г/см}^3$ ?  
А. 1513 т.      Б. 900 т.      В. 2408 т.
7. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 8 см и составляет с боковым ребром угол в  $30^\circ$ . Найдите объем призмы.  
А.  $72 \text{ см}^3$ .      Б.  $64 \text{ см}^3$ .      В.  $60 \text{ см}^3$ .
8. Равнобедренная трапеция, основания которой равны 6 см и 10 см, а острый угол  $60^\circ$ , вращается вокруг большего основания. Вычислите площадь поверхности полученного тела.  
А.  $40 \text{ см}^2$ .      Б.  $40\sqrt{3} \text{ см}^2$ .      В.  $150 \text{ см}^2$ .
9. В цилиндр вписана правильная  $n$ -угольная призма. Найдите отношение объемов призмы и цилиндра, если  $n = 3$ .  
А.  $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ .      Б.  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .      В.  $\frac{3\pi}{7}$ .

### Вариант 3

1. Основание прямой призмы - треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом, равным  $120^\circ$ , между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна  $35 \text{ см}^2$ . Найдите площадь боковой поверхности призмы.  
А.  $42 \text{ см}^2$ .      Б.  $75 \text{ см}^2$ .      В.  $108 \text{ см}^2$ .
2. Основанием пирамиды  $DABC$  является равнобедренный треугольник  $ABC$ , в котором  $AB = AC$ ,  $BC = 6 \text{ см}$ , высота  $AH = 9 \text{ см}$ . Известно также, что  $DA = DB = DC = 13 \text{ см}$ . Найдите высоту пирамиды.  
А. 12 см.      Б. 13 см.      В. 16 см.
3. Точка  $M$  одинаково удалена от всех вершин правильного треугольника  $ABC$  и от его плоскости на 6 см. Найдите расстояние от точки  $M$  до вершин треугольника, если его сторона равна  $8\sqrt{3} \text{ см}$ .  
А. 8 см.      Б. 10 см.      В. 12 см.
4. Отрезок  $AD$  перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника  $ABC$ . Известно, что  $AB = AC = 5 \text{ см}$ ,  $BC = 6 \text{ см}$ ,  $AD = 12 \text{ см}$ . Найдите расстояние от точки  $D$  до отрезка  $BC$ .  
А. 6,5 см.      Б.  $10\sqrt{3} \text{ см}$ .      В.  $4\sqrt{10} \text{ см}$ .
5. Найдите высоту конуса, если площадь его осевого сечения равна  $6 \text{ дм}^2$ , а площадь основания равна  $8 \text{ дм}^2$ .  
А.  $6\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ .      Б.  $8\sqrt{\frac{\pi}{6}}$ .      В.  $\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ .
6. Диаметр Луны составляет (приблизительно) четвертую часть диаметра Земли. Найдите отношение объемов Луны и Земли, считая их шарами.  
А.  $\frac{1}{64}$ .      Б.  $\frac{1}{16}$ .      В.  $\frac{1}{8}$ .

7. Найдите образующую усеченного конуса, если радиусы оснований 3 см и 6 см, а высота 4 см.  
 А. 4 см. Б. 5 см. В. 6,5 см.
8. Равнобедренная трапеция, основания которой равны 6 см и 10 см, а острый угол  $60^\circ$ , вращается вокруг большего основания. Найдите объем тела вращения.  
 А.  $48\pi \text{ см}^3$ . Б.  $100\pi + 6 \text{ см}^3$ . В.  $120\pi \text{ см}^3$ .
9. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 12 см, 10 см, 10 см. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом  $45^\circ$ . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.  
 А.  $48 \text{ см}^2$ . Б.  $48\sqrt{3} \text{ см}^2$ . В.  $48\sqrt{2} \text{ см}^2$ .

#### Вариант 4

1. Основание прямой призмы – равнобедренный треугольник со стороной 6 см, а диагональ боковой грани 10 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.  
 А.  $2 \text{ см}^2$ . Б.  $2\sqrt{2} \text{ см}^2$ . В.  $4 \text{ см}^2$ .
2. Основание пирамиды - прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Высота пирамиды равна 12 см и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите боковые ребра пирамиды.  
 А. 12 см. Б. 13 см. В.  $13\sqrt{2} \text{ см}$ .
3. Через вершину В ромба ABCD проведена прямая BM, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояние от точки M до прямых, содержащих стороны ромба, если  $AB = 25 \text{ см}$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $BM = 12,5 \text{ см}$ .  
 А. 12,5 см и 25 см Б. 13 см и 25 см В. 12,5 см и 24 см.
4. Высота цилиндра равна 10 дм. Площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра и удаленной на 9 дм от нее, равна  $240 \text{ дм}^2$ . Найдите радиус цилиндра.  
 А. 15 дм. Б. 15,5 дм. В.  $15\sqrt{2} \text{ дм}$ .
5. Площадь осевого сечения конуса равна  $0,6 \text{ см}^2$ . Высота конуса равна 1,2 см. Найдите площадь полной поверхности конуса.  
 А.  $1,5\pi \text{ см}^2$ . Б.  $0,9\sqrt{2}\pi \text{ см}^2$ . В.  $0,9\pi \text{ см}^2$ .
6. Найдите образующую усеченного конуса. Если радиусы оснований равны 3 см и 6 см, а высота равна 4 см.  
 А. 5,5 см. Б. 5 см. В.  $5\sqrt{2} \text{ см}$ .
7. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 18 см и составляет угол в  $30^\circ$  с плоскостью боковой грани и угол в  $45^\circ$  с боковым ребром. Найдите объем параллелепипеда.  
 А.  $729\sqrt{2} \text{ см}^3$ . Б.  $729 \text{ см}^3$ . В.  $729\sqrt{2} \text{ см}^3$ .
8. Разверткой боковой поверхности конуса является сектор с дугой  $\beta$ . Найдите  $\beta$ , если высота конуса равна 4 см, а радиус основания равен 3 см.  
 А.  $230^\circ$ . Б.  $250^\circ$ . В.  $216^\circ$ .
9. Сколько понадобится краски, чтобы покрасить бак цилиндрической формы с диаметром основания 1,5 м и высотой 3 м, если на  $1 \text{ м}^2$  расходуется 200 г краски.  
 А.  $1,125\pi \text{ кг}$ . Б.  $1,5\pi \text{ кг}$ . В.  $1\frac{3}{8}\pi \text{ кг}$ .

| Ответы:   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Вариант 1 | В | А | А | В | Б | Б | А | А | В |
| Вариант 2 | Б | А | В | Б | В | А | А | Б | А |
| Вариант 3 | Б | А | Б | В | А | А | Б | В | В |
| Вариант 4 | А | В | А | А | В | Б | В | В | А |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

**Сводная таблица по применяемым формам и методам текущего контроля и оценки результатов обучения**

| <b>Результаты обучения</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <b>Формы и методы контроля и оценки результатов обучения</b>                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>личностных:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                  |
| <p><i>Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к себе, к своему здоровью, к познанию себя:</i></p> <p>-готовность и способность обучающихся к отстаиванию личного достоинства, собственного мнения, готовность и способность вырабатывать собственную позицию по отношению к общественно-политическим событиям прошлого и настоящего на основе осознания и осмысления истории, духовных ценностей и достижений нашей страны;</p> <p><i>Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к России как к Родине (Отечеству):</i></p> <p>-формирование уважения к русскому языку как государственному языку Российской Федерации, являющемуся основой российской идентичности и главным фактором национального самоопределения;</p> <p><i>Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к закону, государству и к гражданскому обществу:</i></p> <p>-мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики, основанное на диалоге культур, а также различных форм общественного сознания, осознание своего места в поликультурном мире;</p> <p><i>Личностные результаты в сфере отношений обучающихся с окружающими людьми:</i></p> <p>-нравственное сознание и поведение на основе усвоения общечеловеческих ценностей, толерантного сознания и поведения в поликультурном мире, готовности и способности вести диалог с другими людьми, достигать в нем взаимопонимания, находить общие цели и сотрудничать для их достижения;</p> <p>-развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.</p> <p><i>Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к окружающему миру, живой природе, художественной культуре:</i></p> <p>-готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;</p> <p>-эстетическое отношения к миру, готовность к эстетическому обустройству собственного быта.</p> | <p>Выполнение практических работ № 1 – 72</p> <p>Оценка правильности выполнения самостоятельной работы</p> <p>Решение задач во время занятия</p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><i>Личностные результаты в сфере отношения обучающихся к труду, в сфере социально-экономических отношений:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- осознанный выбор будущей профессии как путь и способ реализации собственных жизненных планов;</li> <li>- готовность обучающихся к трудовой профессиональной деятельности как к возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем;</li> <li>- готовность к самообслуживанию, включая обучение и выполнение домашних обязанностей.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                          |
| <p><b>метапредметных:</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                          |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>— ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;</li> <li>— находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;</li> <li>— развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <p>Оценка правильности выполнения Контрольные работы №1 – 10<br/>Выполнение практических работ № 1 – 72<br/>Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br/>Решение задач во время занятия</p> |
| <p><b>предметных:</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                          |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>— использовать числовые множества на координатной прямой и на координатной плоскости для описания реальных процессов и явлений; проводить доказательные рассуждения в ситуациях повседневной жизни, при решении задач из других предметов;</li> <li>— выполнять и объяснять сравнение результатов вычислений при решении практических задач, в том числе приближенных вычислений, используя разные способы сравнений; записывать, сравнивать, округлять числовые данные реальных величин с использованием разных систем измерения; составлять и оценивать разными способами числовые выражения при решении практических задач и задач из других учебных предметов;</li> <li>— составлять и решать уравнения, неравенства, их системы при решении задач других учебных предметов; выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений, неравенств и их систем при решении задач других учебных предметов; составлять и решать уравнения и неравенства с параметрами при решении задач других учебных предметов; составлять уравнение, неравенство или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты; использовать программные средства при решении отдельных классов уравнений и неравенств;</li> <li>— определять по графикам и использовать для решения прикладных задач свойства реальных процессов и зависимостей (наибольшие и наименьшие значения, промежутки возрастания</li> </ul> | <p>Оценка правильности выполнения Контрольные работы №1 – 10<br/>Выполнение практических работ № 1 – 72<br/>Оценка правильности выполнения самостоятельной работы<br/>Решение задач во время занятия</p> |



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p>и убывания функции, промежутки знакопостоянства, асимптоты, точки перегиба, период и т.п.); интерпретировать свойства в контексте конкретной практической ситуации; определять по графикам простейшие характеристики периодических процессов в биологии, экономике, музыке, радиосвязи и др. (амплитуда, период и т.п.);</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– решать прикладные задачи из биологии, физики, химии, экономики и других предметов, связанные с исследованием характеристик процессов; интерпретировать полученные результаты;</li> <li>– вычислять или оценивать вероятности событий в реальной жизни; выбирать методы подходящего представления и обработки данных;</li> <li>– составлять с использованием свойств геометрических фигур математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат;</li> <li>– владеть понятиями векторы и их координаты; уметь выполнять операции над векторами; использовать скалярное произведение векторов при решении задач; применять уравнение плоскости, формулу расстояния между точками, уравнение сферы при решении задач; применять векторы и метод координат в пространстве при решении задач.</li> </ul> |  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

### 3.2 Форма промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация по дисциплине математика в 1 семестре – итоговая контрольная работа, во 2 семестре – экзамен.

Итоговая контрольная работа проводится за счет времени отведенного на изучение дисциплины, при условии своевременного и качественного выполнения обучающимся всех видов работ, предусмотренных рабочей программой дисциплины математика.

#### Итоговая контрольная работа

##### Вариант 1

1. Вычислите:  $4^7 \cdot 11^4 : 44^4$
2. Найдите значение выражения:  $\frac{2 \cdot \sqrt{128}}{\sqrt{32}}$ .
3. Вычислите:  $\log_2 8 + \log_{25} 100 - \log_{25} 4$ .
4. Найдите решение уравнения:  $\log_6(x^2 - 5) = \log_6 4x$
5. Вычислите  $\log_2 \left( \cos \frac{\pi}{3} \right)$ .
6. Переведите из радиан в градусы  $\frac{5\pi}{6}$ .
7. Укажите четверть, в которой лежит угол  $\alpha$ , если  $\alpha = 470^\circ$

8. Найдите значение косинуса угла  $\alpha$ , если известно, что:  $\sin \alpha = 0,6$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
9. Найдите область определения функции  $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x^2-49}}$ .
10. Банковская процентная ставка равна 7% годовых. Какова должна быть первоначальная сумма вклада, чтобы через 2 года его размер составил 34347 рублей.
11. В вазе лежат яблоки: 10 зеленых и 5 красных. Сколькими способами можно взять из вазы 2 зеленых и 3 красных яблока?

### Вариант 2

1. Вычислите:  $7^2 \cdot 3^7 : 21^2$ .
2. Найдите значение выражения:  $\frac{3 \cdot \sqrt{108}}{\sqrt{3}}$
3. Вычислите:  $\log_6 36 + \log_3 99 - \log_3 11$ .
4. Найдите решение уравнения:  $\log_3(10 - x^2) = \log_3 3x$
5. Вычислите  $\log_3 \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \right)$
6. Переведите из радиан в градусы  $\frac{7\pi}{6}$ .
7. Укажите четверть, в которой лежит угол  $\alpha$ , если  $\alpha = 500^\circ$ .
8. Найдите значение косинуса угла  $\alpha$ , если известно, что:  $\sin \alpha = 0,8$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ .

9. Найдите область определения функции  $f(x) = \log_5 \frac{6x - x^2}{x + 2}$ .
10. Банковская процентная ставка равна 9% годовых. Какова должна быть первоначальная сумма вклада, чтобы через 2 года его размер составил 59405 рублей.
11. В вазе лежат яблоки: 5 зеленых и 10 красных. Сколькими способами можно взять из вазы 3 зеленых и 2 красных яблока?

### Вариант 3

1. Вычислите:  $3^5 \cdot 25^6 : 75^5$ .
2. Найдите значение выражения:  $\frac{\sqrt{405}}{4\sqrt{5}}$ .

3. Вычислите:  $\log_2 96 - \log_2 3 - \log_9 81$ .
4. Найдите решение уравнения:  $\log_5(x^2 - 8) = \log_5 2x$ .
5. Вычислите  $\log_2 \left( \sin \frac{\pi}{6} \right)$ .
6. Переведите из радиан в градусы  $\frac{5\pi}{3}$ .
7. Укажите четверть, в которой лежит угол  $\alpha$ , если  $\alpha = 380^\circ$ .
8. Найдите значение косинуса угла  $\alpha$ , если известно, что:  $\sin \alpha = -0,6$  и  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
9. Найдите область определения функции  $f(x) = \sqrt{\frac{36 - x^2}{x - 3}}$ .
10. Банковская процентная ставка равна 12% годовых. Какова должна быть первоначальная сумма вклада, чтобы через 2 года его размер составил 56448 рублей.
11. В вазе лежат яблоки: 6 желтых и 12 красных. Сколькими способами можно взять из вазы 4 желтых и 2 красных яблока?

#### Вариант 4

1. Вычислите:  $9^5 \cdot 11^5 : 99^4$ .
2. Найдите значение выражения:  $\frac{5 \cdot \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$ .
3. Вычислите:  $\log_4 320 - \log_4 5 - \log_6 216$ .
4. Найдите решение уравнения:  $\log_2(6 - x^2) = \log_2 5x$ .
5. Вычислите  $\log_3 \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} \right)$ .
6. Переведите из радиан в градусы  $\frac{7\pi}{3}$ .
7. Укажите четверть, в которой лежит угол  $\alpha$ , если  $\alpha = 700^\circ$ .
8. Найдите значение косинуса угла  $\alpha$ , если известно, что:  $\sin \alpha = -0,8$  и  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .
9. Найдите область определения функции  $f(x) = \log_5 \frac{x - 3}{x^2 + 7x}$ .

10. Банковская процентная ставка равна 11% годовых. Какова должна быть первоначальная сумма вклада, чтобы через 2 года его размер составил 73926 рублей.

11. В вазе лежат яблоки: 6 желтых и 12 красных. Сколькими способами можно взять из вазы 2 желтых и 4 красных яблока?

Обучающиеся допускаются к сдаче экзамена при выполнении всех видов самостоятельной работы, практических и контрольных работ, предусмотренных рабочей программой и календарно-тематическим планом дисциплины.

## **Перечень вопросов к экзамену**

### **Часть А**

1. Корень  $n$ -ой степени. Свойства корня  $n$ -ой степени. Обобщение понятия о показателе степени
2. Понятие логарифма и его свойства. Основное логарифмическое тождество.
3. Десятичные и натуральные логарифмы. Правила действий с логарифмами. Переход к новому основанию.
4. Логарифмические уравнения. Приемы решения. Примеры.
5. Логарифмическая функция. Ее свойства, график
6. Тригонометрические функции. Определение синуса, косинуса, тангенса, котангенса.
7. Радианная мера угла. Переход от градусной меры к радианной и наоборот.
8. Зависимость между тригонометрическими функциями одного угла.
9. Формулы двойного угла. Формулы сложения.
10. Решение простейших тригонометрических уравнений.
11. Тригонометрические функции. Область определения и множество значений тригонометрических функций.
12. Обратные тригонометрические функции.
13. Основные понятия комбинаторики: размещения, перестановки и сочетания.
14. Теория вероятностей. Событие, вероятность события.
15. Зависимость и независимость событий. Совместность и несовместность событий. Противоположность событий.
16. Теория вероятностей. Сложение и умножение вероятностей.
17. Приращение функции и приращение аргумента. Определение производной.
18. Физический и механический смысл производной.
19. Уравнение касательной к графику функции
20. Правила и формулы дифференцирования.
21. Применение производной для нахождения экстремума функции
22. Понятие интеграла и первообразной
23. Теорема Ньютона – Лейбница
24. Стереометрия. Основные аксиомы стереометрии и следствия из аксиом.
25. Прямые и плоскости в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
26. Взаимное расположение прямой и плоскости. Параллельность прямой и плоскости.

27. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Перпендикулярность двух плоскостей.
28. Двугранный угол. Угол между плоскостями.
29. Многогранники. Вершины, ребра, грани многогранника. Формула Эйлера.
30. Призма и ее свойства. Прямая и наклонная призмы.
31. Правильная призма. Площадь боковой и полной поверхности призмы.
32. Куб. Параллелепипед и его свойства. Объем куба. Объем параллелепипеда.
33. Пирамида и ее свойства. Площадь боковой и полной поверхности пирамиды.
34. Правильная пирамида. Усеченная пирамида.
35. Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр).
36. Тела и поверхности вращения. Цилиндр. Основания, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Площадь боковой и полной поверхности.
37. Тела и поверхности вращения. Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Площадь боковой и полной поверхности.
38. Шар и сфера. Площадь поверхности сферы.
39. Сечения шара и сферы.
40. Формулы объема пирамиды, цилиндра и конуса. Формула объема шара.

### Часть В

1. Упростите выражение  $\frac{x-16}{x+x^{0,5}+1} : \frac{x^{0,5}+4}{x^{1,5}-1}$  и найдите его значение при  $x = 2,25$
2. Расположите числа в порядке возрастания  $2^{-\frac{3}{4}}; 2; \frac{1}{2}; 2^{\frac{2}{3}}; 2^{-\frac{4}{3}}$
3. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь:  $4,(8); -2,6(93)$ .
4. Расположите числа в порядке возрастания  $\left(\frac{1}{3}\right)^2; \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}; 9^{-\frac{1}{3}}; 3^{\frac{3}{4}}; \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$
5. Вычислите:  $\log_4 5 + \log_4 25 + \log_4 \frac{2}{125}$
6. Вычислите:  $\log_3 72 - \log_3 \frac{16}{27} + \log_3 18$
7. Вычислите:  $\log_4 \frac{1}{5} + \log_4 36 + \frac{1}{2} \log_4 \frac{25}{81}$
8. Решите логарифмическое уравнение:  $\log_3 (2x - 1) = 2$
9. Решите логарифмическое уравнение  $\log_5 (x + 1) = \log_5 (4x - 5)$
10. Решите логарифмическое уравнение  $\log_3 (3x - 5) = \log_3 (x - 3)$
11. Решите логарифмическое уравнение  $\log_2 (x + 3) = 4$
12. Решите логарифмическое уравнение  $\log_2 (4 - x) + \log_2 (1 - 2x) = 2 \log_2 3$
13. Решите логарифмическое уравнение  $\lg (3 - x) - \lg (x + 2) = 2 \lg 2$
14. Упростите выражение:  $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - 1}$

15. Упростите выражение:  $\frac{\sin(360^\circ - \alpha) \cos(-\alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)}$
16. Упростите выражение:  $1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
17. Упростите выражение:  $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) \operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$
18. Найдите  $\cos \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$  и  $\alpha$  - угол II координатной четверти
19. Найдите  $\cos \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = 0,6$  и  $\alpha$  - угол I координатной четверти
20. Найдите  $\cos \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = -0,8$  и  $\alpha$  - угол III координатной четверти
21. Найдите  $\sin \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = 0,6$  и  $\alpha$  - угол I координатной четверти
22. Решите тригонометрическое уравнение:  $2 \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$
23. Решите тригонометрическое уравнение:  $\sin^2 x - 0,25 = 0$
24. Решите тригонометрическое уравнение:  $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$
25. Решите тригонометрическое уравнение:  $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$
26. Решите тригонометрическое уравнение:  $2 \sin^2 x + 7 \sin x - 4 = 0$
27. Решите тригонометрическое уравнение:  $2 \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \sqrt{2} = 0$
28. Решите тригонометрическое уравнение:  $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$
29. Решите показательное уравнение:  $\left(\frac{16}{25}\right)^{x+3} = \left(\frac{125}{64}\right)^2$
30. Решите показательное уравнение:  $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$
31. Решите показательное уравнение:  $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$
32. Решите показательное уравнение:  $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4,5^{x-2}$
33. Напишите уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 5 - \frac{1}{2}x^2$  в точке  $x_0 = 2$ .
34. Составьте уравнение касательной к графику функции  $f(x) = e^{2x}$  в точке  $x_0 = 0$ .
35. Запишите уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 3x^3 + 5x$  в точке  $(1; 8)$ .
36. Найдите производную функции  $y = \frac{5-x}{x+2}$
37. Найдите значение производной функции  $y = 3x + 4 - 5 \sin x$  в точке  $x_0 = \frac{\pi}{2}$
38. Найдите производную функции  $y = \frac{3+2x}{x-5}$
39. Найдите производную функции  $y = -\frac{5}{4}x^4 + 3x^2 - 2x + 11$
40. Найдите производную функции  $y = x^5 - x(x^3 + 7)$ .
41. Найти промежутки возрастания функции  $y = x^2 - 2x + 3$ .
42. Исследуйте функцию  $f(x) = 3x^5 - 20x^3$  на возрастание (убывание) и экстремумы.
43. Исследуйте функцию  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3$  на возрастание (убывание).

44. Вычислите интеграл  $\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1)dx$
45. Вычислите интеграл  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$ .
46. Вычислите интеграл  $\int_1^9 \frac{6x}{\sqrt{x}} dx$
47. Вычислите интеграл  $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx$
48. Вычислите интеграл  $\int_0^1 (1 + 2x)^4 dx$
49. Найдите общий вид первообразной для функции  $f(x) = \frac{1}{x} - \sin 3x$
50. Найти первообразную функции  $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ , график которой проходит через точку  $M(2; 4)$ .
51. Найдите первообразную функции  $x\sqrt{x} - 3\sqrt[5]{x^2}$
52. Для функции  $f(x) = (2x + 5)^6$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M(-2; 3)$ .
53. В ящике 20 шаров, из них 12 белых, остальные голубые. Извлекают 2 шара. Найти вероятности, что оба шара белые.
54. В первой урне содержится 8 синих и 10 желтых шаров, во второй 4 белых и 12 желтых шаров. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару. Найти вероятность того, что оба извлеченных шара желтого цвета.
55. Алфавит некоторого языка содержит 12 букв. Сколько существует трехбуквенных слов, составленных из букв этого алфавита, если буквы в словах могут повторяться?
56. Алфавит некоторого языка содержит 12 букв. Сколько существует трехбуквенных слов, составленных из букв этого алфавита, если буквы в словах не могут повторяться?
57. В корзине 16 шаров, из них 14 белых, остальные синие. Извлекают 2 шара. Найти вероятности событий того, что оба шара синие; первый шар белый, а второй синий.
58. На дежурство из 3 мальчиков и 4 девочек случайно отбирают 4 дежурных. Сколькими способами их можно отобрать при условии, что будут отобраны 2 мальчика и 2 девочки?
59. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы за определенный промежуток времени первого, второго и третьего элемента соответственно равны 0,4; 0,3; 0,5. Найти вероятность того, что за это время откажут все три элемента.
60. Из 15 туристов надо выбрать дежурного и его помощника. Сколькими способами это можно сделать?

61. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 см, а радиус основания – 5 см.  
Найдите высоту цилиндра.
62. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 12см, а апофема - 15см.  
Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
63. В основании правильной четырехугольной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит квадрат со стороной 4 см. Диагональ призмы  $AC_1$  образует с плоскостью основания  $ABCD$  угол  $60^\circ$ . Найдите высоту призмы и площадь полной поверхности.
64. Диагональ правильной четырехугольной призмы составляет с боковой гранью угол  $60^\circ$ . Найдите объем призмы, если сторона основания 8см
65. Радиусы оснований усеченного конуса равны 12 см и 5 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом  $45^\circ$ . Найдите площадь и объем усеченного конуса.
66. Найдите полную площадь поверхности и объем пирамиды, у которой высота равна 2 м, а основанием пирамиды является квадрат со стороной 3 м.
67. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами **12 см, 10 см, 10 см**. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом  $60^\circ$ . Найдите объем и площадь боковой поверхности пирамиды.
68. Найдите сторону основания и высоту правильной четырёхугольной призмы, если  $S_{\text{полн}}=90\text{см}^2$ ,  $S_{\text{бок}}=40\text{см}^2$ .
69. Высота цилиндра равна 10 дм. Площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра и удаленной на 9 дм от нее, равна  $240\text{ дм}^2$ . Найдите радиус цилиндра.
70. Основание прямой призмы – равнобедренный, прямоугольный треугольник со стороной **6 см**, а диагональ боковой грани 10 см. Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы.
71. В правильной четырехугольной призме площадь основания равна  $25\text{ см}^2$ , а высота 4 см. Найдите диагональ и объем призмы.
72. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 5 см, высота призмы равна 8 см. Найдите площадь полной поверхности.
73. Радиус окружности, описанной около основания правильной шестиугольной призмы, равен 3 см. Найдите площадь полной поверхности призмы, если её высота равна 10 см.
74. Диагональ правильной четырехугольной призмы составляет с боковой гранью угол  $30^\circ$ . Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы, если сторона основания  $\sqrt{2}$  см.
75. Высота цилиндра на **12 см** больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна  **$288\pi\text{ см}^2$** . Найдите радиус основания цилиндра.
76. Диагональ правильной четырехугольной призмы составляет с боковой гранью угол  $60^\circ$ . Найдите объем призмы, если сторона основания 6 см.
77. Диаметр шара равен высоте конуса, образующая которого составляет с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Найти отношение объёмов конуса и шара.
78. Радиус шара равен  $R=5$ . Найдите площадь полной поверхности вписанного в шар куба.
79. Радиусы оснований усеченного конуса равны 4 см и 12 см, а образующая равна 17см. Найдите: а) высоту усеченного конуса; б) площадь осевого сечения.



80. В основании правильной четырехугольной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит квадрат со стороной 8 см. Диагональ призмы  $AC_1$  образует с плоскостью основания  $ABCD$  угол  $30^\circ$ . Найдите высоту призмы и площадь полной поверхности.

#### **4 Система оценивания комплекта ФОС текущего контроля и промежуточной аттестации**

При оценивании практической и самостоятельной работы и форм промежуточной аттестации обучающегося учитывается следующее:

- качество выполнения практической части работы;
- качество оформления отчета по работе;
- качество устных ответов на контрольные вопросы при защите работы.

Каждый вид работы оценивается по пяти бальной шкале.

«5» (отлично) – за глубокое и полное овладение содержанием учебного материала, в котором обучающийся свободно и уверенно ориентируется; за умение практически применять теоретические знания, высказывать и обосновывать свои суждения. Оценка «5» (отлично) предполагает грамотное и логичное изложение ответа.

«4» (хорошо) – если обучающийся полно освоил учебный материал, владеет научно-понятийным аппаратом, ориентируется в изученном материале, осознанно применяет теоретические знания на практике, грамотно излагает ответ, но содержание и форма ответа имеют отдельные неточности.

«3» (удовлетворительно) – если обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений учебного материала, но излагает его неполно, непоследовательно, допускает неточности, в применении теоретических знаний при ответе на практико-ориентированные вопросы; не умеет доказательно обосновать собственные суждения.

«2» (неудовлетворительно) – если обучающийся имеет разрозненные, бессистемные знания, допускает ошибки в определении базовых понятий, искажает их смысл; не может практически применять теоретические знания.

##### **Критерии оценивания практических работ.**

Практическая работа оценивается максимально оценкой «5» (отлично).

Каждое задание оценивается максимально оценкой «5» (отлично).

По результатам оценивания всех заданий оценка соответствует средней.

Критерии оценивания решений задач.

«5» (отлично) – составлен правильный алгоритм решения задачи, в логическом рассуждении, в выборе нормативных источников и решении нет ошибок, получен верный ответ, задача решена рациональным способом.

«4» (хорошо) – составлен правильный алгоритм решения задачи, в логическом рассуждении и решении нет существенных ошибок; правильно сделан выбор нормативных источников; есть объяснение решения, но задача решена нерациональным способом или допущено не более двух несущественных ошибок, получен верный ответ.

«3» (удовлетворительно) – задание выполнено, в логическом рассуждении нет существенных ошибок, но допущены существенные ошибки в выборе нормативных источников; задача решена не полностью или в общем виде.

«2» (неудовлетворительно) – задача решена неправильно.

##### **Критерии оценивания самостоятельных работ.**

Критерии оценивания решений задач.

«5» (отлично) – составлен правильный алгоритм решения задачи, в логическом рассуждении, в выборе нормативных источников и решении нет ошибок, получен верный ответ, задача решена рациональным способом.

«4» (хорошо) – составлен правильный алгоритм решения задачи, в логическом рассуждении и решении нет существенных ошибок; правильно сделан выбор

нормативных источников; есть объяснение решения, но задача решена нерациональным способом или допущено не более двух несущественных ошибок, получен верный ответ.

«3» (удовлетворительно) – задание выполнено, в логическом рассуждении нет существенных ошибок, но допущены существенные ошибки в выборе нормативных источников; задача решена не полностью или в общем виде.

«2» (неудовлетворительно) – задача решена неправильно.

#### **Критерии оценивания контрольных работ.**

«5» (отлично) – решено 81-100% заданий.

«4» (хорошо) – решено 61 – 80% заданий.

«3» (удовлетворительно) – решено 41 – 60% заданий.

«2» (неудовлетворительно) – решено менее 40% заданий.

#### **Критерии оценивания дифференцированного зачета**

– выполнено правильно 9-11 заданий – оценка «отлично» (80 – 100%);

– выполнено правильно 6-8 заданий – оценка «хорошо» (55– 79%);

– выполнено правильно 4-6 заданий – оценка «удовлетворительно» (36–54%);

– выполнено правильно 0-3 заданий – оценка «неудовлетворительно» (0-35%).

#### **Критерии оценивания ответов по экзаменационным билетам.**

Ответ по экзаменационному билету оценивается максимально оценкой «5» (отлично).

Первый вопрос максимально оценивается оценкой «5» (отлично).

Каждая из двух задач оценивается отдельно максимально оценкой «5» (отлично).

По результатам оценивания всех трех заданий оценка соответствует средней.