

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Сыров Игорь Анатольевич
Должность: Директор
Дата подписания: 28.03.2025
10:44:01
Идентификатор документа: 666417e96c4175886cf8626a198149ad36

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

Стерлитамакский филиал

Колледж

Рабочая программа дисциплины

дисциплина

ЕН.01 Элементы высшей математики

Математический и общий естественнонаучный цикл, обязательная часть

цикл дисциплины и его часть (обязательная, вариативная)

Специальность

09.02.07

Информационные системы и программирование

код

наименование специальности

Квалификация

программист

Год начала подготовки

2025

Разработчик (составитель)

Аслаев И.Г. преподаватель

ученая степень, ученое звание,
категория, Ф.И.О.

Стерлитамак 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ПАСПОРТ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ.....	3
1.1. Область применения рабочей программы	3
1.2. Место учебной дисциплины в структуре основной образовательной программы ..	3
2. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ	4
2.1 Объем дисциплины и виды учебной работы	4
2.2. Тематический план и содержание дисциплины.....	5
3. ФОРМЫ КОНТРОЛЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, ИМЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ОПЫТА, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ ...	8
4. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ДИСЦИПЛИНЫ	8
4.1. Требования к минимальному материально-техническому обеспечению	8
4.2. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)	8
4.2.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)	8
4.2.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (далее - сеть «Интернет»), необходимых для освоения дисциплины (модуля) Ошибка! Закладка не определена.....	9
4.2.3. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости).....	Ошибка! Закладка не определена.
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	11
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	15

1. ПАСПОРТ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Область применения рабочей программы

Рабочая программа общеобразовательной учебной дисциплины является частью основной образовательной программы в соответствии с ФГОС для специальности: специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование, для обучающихся очной формы обучения.

1.2. Место учебной дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина относится к математическому и общему естественнонаучному циклу. Дисциплина реализуется в рамках обязательной части.

1.3. Планируемые результаты освоения дисциплины:

1.3.1. Освоение содержания общеобразовательной учебной дисциплины обеспечивает достижение обучающимися следующих результатов:

Код ОК, ПК	Умения	Знания
ОК 01 выбирать способы решения задач профессиональ ной деятельности, применительно к различным контекстам	распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части; определять этапы решения задачи; выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы; составить план действия; определить необходимые ресурсы; владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах; реализовать составленный план; оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)	актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить; основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте; алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях; методы работы в профессиональной и смежных сферах; структуру плана для решения задач; порядок оценки результатов решения задач профессиональной деятельности
ОК 02 осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения	определять задачи для поиска информации; определять необходимые источники информации; планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию; выделять наиболее значимое в перечне информации;	номенклатуры информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности; приемы структурирования информации; формат оформления результатов поиска информации

задач профессиональной деятельности.	оценивать практическую значимость результатов поиска; оформлять результаты поиска	
--------------------------------------	---	--

2. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1 Объем дисциплины и виды учебной работы

Очная форма обучения

<i>Вид учебной работы</i>	<i>Объем часов</i>
Объем образовательной программы	72
Работа обучающихся во взаимодействии с преподавателем	52
в том числе:	
лекции (уроки)	16
в форме практической подготовки (если предусмотрено)	*
практические занятия	36
в форме практической подготовки (если предусмотрено)	*
лабораторные занятия	
в форме практической подготовки (если предусмотрено)	*
Самостоятельная работа обучающегося (всего)	14
<i>Решение задач, подготовка в контрольные работы</i>	12
<i>Консультация</i>	2
Промежуточная аттестация в форме экзамена в третьем семестре	6

2.2. Тематический план и содержание учебной дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики

Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала и формы организации деятельности обучающихся	Объем часов	Осваиваемые элементы компетенций
1	2	3	4
Раздел 1 Линейная алгебра	Содержание учебного материала	8/3	ОК 01, ОК 02
	Матрицы и определители		
	Тематика учебных занятий	2	
	1. Понятие матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами	2	
	Практическая работа	6	
	1. Транспонирование матрицы. Нахождение суммы и произведения матриц	2	
	2. Вычисление определителя. Расчет минора.	2	
	3. Вычисление обратной матрицы	2	
Раздел 2 Системы линейных уравнений	Содержание учебного материала	6/2	
	Системы линейных алгебраических уравнений первой степени		
	Тематика учебных занятий	2	
	1. Матричные уравнения. Матричный метод для решения системы линейных уравнений. Метод Крамера и Гаусса для решения системы линейных уравнений	2	
	Практическая работа	4	
	1. Решение СЛАУ методом Крамера матричным методом	2	
	2. Решение метод Гаусса системы линейных уравнений	2	
	Самостоятельная работа	2	
Раздел 3 Теория пределов	Содержание учебного материала	6/2	ОК 02
	Теория пределов функции одной переменной		
	Тематика учебных занятий	2	
	1. Числовые последовательности. Предел функции. Свойства пределов. Основные теоремы для вычисления пределов	2	
	Практическая работа	4	
	1. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел	2	
	2. Приемы для раскрытия неопределенностей. Принцип замены эквивалентными	2	
	Самостоятельная работа	2	
Раздел 4	Содержание учебного материала	14/2	ОК 01, ОК 02

Дифференциальное и интегральные исчисление.	Дифференциальное и интегральные исчисления функции одной действительной переменной		
	Тематика учебных занятий	4	
	1.Определение производной. Геометрический и физический смысл производной. Правила дифференцирования. Наибольшее и наименьшее значение функции	2	
	2. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Свойства.	2	
	Практическая работа	10	
	1.Правила нахождения производной для суммы, произведения, частного функций	2	
	2.Производная сложной функции. Вычисление второй производной функций	2	
	3. Вычисление неопределенных интегралов	2	
	4. Вычисление определенного интеграла методами замены и интегрирования по частям	2	
	5. Расчет определённых интегралов по формуле Ньютона-Лейбница	2	
	Самостоятельная работа	3	
Раздел 5 Дифференциальное и интегральные исчисление функции нескольких переменных	Содержание учебного материала	6/2	OK 02
	Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких действительных переменных		
	Тематика учебных занятий	2	
	1. Предел функции. Непрерывность функции. Дифференцируемость функции.	2	
	Практическая работа	4	
	1.Вычисление предела функции.	2	
	2. Двойной интеграл. Свойства двойного интеграла. Геометрический смысл двойного интеграла	2	
	Самостоятельная работа	2	
Раздел 6 Теория рядов	Содержание учебного материала	4/2	OK 01. OK 02
	Числовые, функциональные и степенные ряды		
	Тематика учебных занятий	2	
	1.Определение числового ряда. Свойства рядов. Условная сходимость ряда	2	
	Практическая работа	2	
	1.Исследование ряда на абсолютную и условную сходимость	2	
	Самостоятельная работа	2	
Раздел 7 Обыкновенные дифференциальные уравнения	Содержание учебного материала	4/2	OK 02
	Дифференциальные уравнения первого и второго порядка		
	Тематика учебных занятий	2	
	1.Уравнение с разделяющимися переменными Линейные уравнения, уравнения	2	

	8	Бернулли		
		Практическая работа	2	
		1.Решение задач на нахождение общих интегралов дифференциального уравнения.	2	
		Самостоятельная работа	2	
Раздел Аналитическая геометрия		Содержание учебного материала	4/2/2	ОК 01. ОК 02
		Аналитическая геометрия на плоскости		
		Тематика учебных занятий	2	
		1.Уравнение прямой на плоскости. Угол между прямыми. Линии второго порядка на плоскости	2	
		Практическая работа	2	
		1.Вычисление точек пересечения прямых на плоскости	2	
		Самостоятельная работа	2	
		Контрольная работа	2	
		Консультация	2	
		Всего	52/12/2	

Последовательное тематическое планирование содержания рабочей программы дисциплины, календарные объемы, виды занятий, формы организации самостоятельной работы также конкретизируются в календарно-тематическом плане (Приложение 1)

3. ФОРМЫ КОНТРОЛЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, ИМЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ОПЫТА, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ

Фонд оценочных средств (далее – ФОС) - комплект методических и контрольных материалов, используемых при проведении текущего контроля освоения результатов обучения и промежуточной аттестации. ФОС предназначен для контроля и управления процессом приобретения обучающимися необходимых знаний, умений и компетенций, определенных во ФГОС (Приложение № 2).

4. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Требования к минимальному материально-техническому обеспечению

Реализация программы дисциплины требует наличия учебных аудиторий

Аудитория № 6. Учебная аудитория для проведения: лекционных, семинарских, практических занятий, уроков, для проведения групповых и индивидуальных консультаций, для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации, курсового проектирования (выполнения курсовых работ)

Учебная мебель, доска.

Аудитория № 144. Читальный зал. Помещение для самостоятельной работы обучающихся.

Учебная мебель, учебно-наглядные пособия, компьютеры с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС Филиала

4.2. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

4.2.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Основная учебная литература:

1. Высшая математика : учебник и практикум для СПО / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общ.ред. М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 472 с. — (Серия :Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01497-6. — Режим доступа :www.biblio-online.ru/book/vyshshaya-matematika-437476

2. Дорофеева, А. В. Математика : учебник для СПО / А. В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 400 с. — (Серия :Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-03697-8. — Режим доступа :www.biblio-online.ru/book/matematika-426504

3. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для СПО / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 401 с. — (Серия :Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Режим доступа :www.biblio-online.ru/book/matematika-433286

Дополнительные источники:

1. Шипачев, В. С. Математика : учебник и практикум для СПО / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 447 с. — (Серия : Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-11546-8. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/matematika-445570

2. Баврин, И. И. Математика для технических колледжей и техникумов : учебник и практикум для СПО / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 397 с. — (Серия : Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08026-1. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/matematika-dlya-tehnicheskikh-kolledzhey-i-tehnikumov-434618

3. Гисин, В. Б. Математика. Практикум : учеб. пособие для СПО / В. Б. Гисин, Н. Ш. Кремер. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 202 с. — (Серия : Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-8846-8. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/matematika-praktikum-437448

4.2.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (далее - сеть «Интернет»), необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Перечень договоров ЭБС и БД			
Учебный год 2024/2025		Наименование документа с указанием реквизитов	Срок действия документа
		Договор на доступ к ЭБС ZNANIUM.COM между УУНиТ в лице директора СФ УУНиТ и ООО «Знаниум» № 2024-эбс от 09.07.2024	С 12.07.2024 по 11.07.2025
		Договор на доступ к ЭБС «ЭБС ЮРАЙТ» (полная коллекция) между УУНиТ в лице директора СФ УУНиТ и ООО «Электронное издательство ЮРАЙТ» № 1/25-эбс от 06.03.2025 г.	С 06.03.2025 по 05.03.2026
		Договор на доступ к ЭБС «Университетская библиотека онлайн» между УУНиТ «Нексмедиа» № 223-883 от 19.08.2024	01.10.2 024 по 30.09.2025
		Договор на доступ к ЭБС «Лань» между УУНиТ и издательством «Лань» № ОГЗ-647 от 08.07.2024	С 08.08.2024 по 07.08.2025
		Договор на доступ к СЭБ между УУНиТ и издательством «Лань» № СЭБ 47-ДС 5010-24 от 04.06.2024	С 04.06.2024 по 20.05.2026
		Договор на доступ к электронным изданиям в составе базы данных «НАУЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕКА eLIBRARY.RU» между УУНиТ и ООО НЭБ № ОГЗ-1283 от 05.12.2024	С 01.01.2025 по 30.12.2025
		Договор на БД диссертаций между УУНиТ и РГБ № 223-664 от 15.07.2024	С 10.08.2024 по

			09.08.2025
		Договор на доступ к ЭБС BOOK.ru (доступ к учебнику: Основы российской государственности : учебник / А. В. Малько, А. А. Вилков, В. В. Гурьев [и др.] ; под ред. А. В. Малько. — Москва : КноРус, 2024. — 263 с. — ISBN 978-5-406-12322-5) между УУНиТ в лице директора СФ УУНиТ и ООО «КноРус медиа» № б/н от 16.10.2024 г.	С 23.10.2024 по 22.10.2025

	Адрес (URL)	Описание страницы
1.	www.mathprofi.ru	На сайте представлено решение достаточного количества задач для усвоения материала, условия задач для самостоятельного изучения, примеры вариантов контрольных работ.

4.2.3. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Наименование программного обеспечения
Office Standard 2007 Russian OpenLicensePackNoLevelAcademic
Mathcad University Classroom Perpetual-15 Floating.
АО «Уфанет» (Интернет)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

Стерлитамакский филиал

Колледж

Календарно-тематический план

по дисциплине

ЕН.01 Элементы высшей математики

	специальность
<i>09.02.07</i>	<i>Информационные системы и программирование</i>
код	наименование специальности
	квалификация
	<i>программист</i>

Разработчик (составитель)

Аслаев И.Г. преподаватель

ученая степень, ученое звание,
категория, Ф.И.О.

Стерлитамак 2025

Очная форма обучения

№ п/п	Наименование разделов и тем	Кол-во часов	Календарные сроки изучения (план)	Вид занятия	Домашнее задание
Раздел 1. Линейная алгебра					
1	Понятие матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами	2/2	сентябрь	Лекция	Повторить конспект
2	Транспонирование матрицы. Нахождение суммы и произведения матриц	2/4	сентябрь	практическое занятие	Решить задачи
3	Вычисление определителя. Расчет минора	2/6	сентябрь	практическое занятие	Решить задачи
4	Вычисление обратной матрицы	2/8	сентябрь	практическое занятие	Решить задачи
Раздел 2. Системы линейных уравнений.					
5	Матричные уравнения. Методы решения системы линейных уравнений.	2/10	сентябрь	Лекция	Повторить конспект
6	Решение СЛАУ методом Крамера матричным методом	2/12	сентябрь	практическое занятие	Решить задачи
7	Решение метод Гаусса системы линейных уравнений	2/14	октябрь	практическое занятие	Решить задачи
Раздел 3. Теория пределов					
8	Числовые последовательности. Предел функции. Свойства пределов. Основные теоремы для вычисления пределов	2/16	октябрь	Лекция	Повторить конспект
9	Первый и второй замечательные пределы	2/18	октябрь	практическое занятие	Решить задачи
10	Приемы для раскрытия неопределенностей. Принцип замены эквивалентными	2/20	октябрь	практическое занятие	Решить задачи
Раздел 4. Дифференциальное и интегральные исчисление.					
11	Производная. Правила	2/22	октябрь	Лекция	Повторить конспект

	дифференцирования. Виды интегралов				
12	Правила нахождения производной для суммы, произведения, частного функций	2/24	октябрь	практическое занятие	Решить задачи
13	Производная сложной функции. Вычисление второй производной функций	2/26	октябрь	практическое занятие	Решить задачи
14	Вычисление неопределенных интегралов.	2/28	ноябрь	практическое занятие	Решить задачи
15	Вычисление определенного интеграла методами замены и интегрирования по частям	2/30	ноябрь	практическое занятие	Решить задачи
16	Расчет определённых интегралов по формуле Ньютона-Лейбница	2/32	ноябрь	практическое занятие	Решить задачи
Раздел 5 Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных					
17	Предел функции. Непрерывность функции. Дифференцируемость функции	2/34	ноябрь	Лекция	Повторить конспект
18	Вычисление предела функции.	2/36	ноябрь	практическое занятие	Решить задачи
19	Двойной интеграл Вычисления двойных интегралов	2/38	ноябрь	практическое занятие	Решить задачи
Раздел 6 Теория рядов					
20	Определение числового ряда. Свойства рядов Условная сходимость ряда	2/40	ноябрь	Лекция	Повторить конспект
21	Исследование ряда на абсолютную и условную сходимость	2/42	декабрь	практическое занятие	Решить задачи
Раздел 7 Обыкновенные дифференциальные уравнения					
22	Уравнение с разделяющимися переменными Линейные уравнения, уравнения Бернулли	2/44	декабрь	Лекция	Повторить конспект
23	Решение задач на нахождение общих	2/46	декабрь	практическое занятие	Решить задачи

	интегралов дифференциального уравнения.				
Раздел 8 Аналитическая геометрия					
24	Уравнение прямой на плоскости. Угол между прямыми. Линии второго порядка на плоскости	2/48	декабрь	Лекция	Повторить конспект
25	Вычисление точек пересечения прямых на плоскости	2/50	декабрь	практическое занятие	Решить задачи
26	Контрольная работа	2/52	декабрь	практическое занятие	Решить задачи
Всего часов		52			

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

Стерлитамакский филиал

Фонд оценочных средств

по дисциплине

ЕН.01 Элементы высшей математики

Математический и общий естественнонаучный цикл, обязательная часть

цикл дисциплины и его часть (обязательная, вариативная)

специальность

09.02.07

Информационные системы и программирование

код

наименование специальности

квалификация

программист

Разработчик (составитель)

Аслаев И.Г. преподаватель

преподаватель

ученая степень, ученое звание,
категория, Ф.И.О

I Паспорт фондов оценочных средств

Фонд оценочных средств (ФОС) предназначен для проверки результатов освоения дисциплины Элементы высшей математики, входящей в состав программы подготовки специалистов среднего звена по специальности Информационные системы и программирование. **Работа обучающихся во взаимодействии с преподавателем 52**, на самостоятельную работу 14.

2. Объекты оценивания – результаты освоения дисциплины

ФОС позволяет оценить следующие результаты освоения дисциплины Элементы высшей математики в соответствии с ФГОС специальности Информационные системы и программирование и рабочей программой дисциплины Элементы высшей математики:

умения:

- распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы;
- составить план действия; определить необходимые ресурсы;
- владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;
- реализовать составленный план;
- оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)
- определять задачи для поиска информации; определять необходимые источники информации; планировать процесс поиска;
- структурировать получаемую информацию;
- выделять наиболее значимое в перечне информации; оценивать практическую значимость результатов поиска; оформлять результаты поиска.

знания:

- актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить;
- основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте;
- алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях;
- методы работы в профессиональной и смежных сферах;
- структуру плана для решения задач;
- порядок оценки результатов решения задач профессиональной деятельности
- номенклатуры информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности;
- приемы структурирования информации;
- формат оформления результатов поиска информации.

Вышеперечисленные умения, знания направлены на формирование у обучающихся следующих **общих компетенций**:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

3 Формы контроля и оценки результатов освоения дисциплины

Контроль и оценка результатов освоения – это выявление, измерение и оценивание

знаний, умений и формирующихся общих компетенций в рамках освоения дисциплины.

В соответствии с учебным планом специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование и рабочей программой дисциплины Элементы высшей математики предусматривается текущий и промежуточный контроль результатов освоения.

3.1 Формы текущего контроля

Текущий контроль успеваемости представляет собой проверку усвоения учебного материала, регулярно осуществляемую на протяжении курса обучения.

Текущий контроль результатов освоения дисциплины в соответствии с рабочей программой дисциплины происходит при использовании следующих обязательных форм контроля:

- проверка выполнения контрольных работ.
- проверка выполнения практических работ.
- проверка выполнения самостоятельных работ.

Во время проведения учебных занятий дополнительно используются следующие формы текущего контроля – устный опрос, решение задач.

Тематика устного опроса

1. Операции над матрицами.
2. Специфические свойства операций над матрицами.
3. Транспортирование матриц. Свойства операции транспортирования.
4. Определители. Свойства определителей.
5. Теорема Лапласа.
6. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы.
7. Алгоритм построения обратной матрицы.
8. Единственность обратной матрицы.
10. Ранг матрицы.
11. Теорема Кронекера-Капелли.
12. Метод Гаусса.
13. Модель Леонтьева.
14. Числовая функция числового аргумента. Примеры. График функции. График обратной функции.
15. Способы задания функций. Арифметические операции над функциями.
16. Ограниченные и неограниченные функции. Геометрическое истолкование. Грани функции. Примеры.
17. Монотонные функции. Кусочно-монотонные функции. Геометрическое истолкование. Примеры.
18. Четные и нечетные функции. Теоремы о них. Примеры.
19. Периодические функции. Теоремы. Примеры.
20. Элементарные функции, их классификация.
21. Определение предела функции по Коши. Геометрический смысл. Теорема о единственности предела.
22. Определение предела функции по Гейне, его эквивалентность определению предела по Коши.
23. Локальные свойства функций, имеющих конечный предел.
24. Бесконечно малые функции (б.м.ф.). Теоремы о б.м.ф.
25. Бесконечно большие функции (б.б.ф.). Связь между б.б.ф. и б.м.ф. Связь между б.б.ф. и неограниченными функциями.
26. Сравнение б.м.ф. Критерий эквивалентности б.м.ф. Теорема о замене эквивалентных б.м.ф. Теорема об эквивалентности суммы б.м.ф.

27. Первый замечательный предел.
28. Частичные пределы функции. Односторонние пределы. Теорема о частичных пределах и ее следствия.
29. Теорема о пределе монотонной функции. Теорема Вейерштрасса о сходимости последовательности.
30. Второй замечательный предел. Следствия.
31. Обратная функция. Теорема о существовании непрерывной обратной функции.
32. Степенная функция с натуральным показателем. Свойства. Степенная функция с целым отрицательным показателем. Свойства.
33. Показательная функция на множестве действительных чисел. Свойства.
34. Логарифмическая функция и ее свойства.
35. Степенная функция с действительным показателем. Свойства.
36. Тригонометрические функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Свойства.
37. Тригонометрические функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. Свойства.
38. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$. Свойства.
39. Обратные тригонометрические функции $y = \arctg x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$. Свойства.
40. Понятие дифференцируемости функции. Производная и дифференциал. Геометрический и механический смысл производной. Теоремы о производной суммы, произведения и частного.
41. Производная и дифференциал обратной и сложной функций. Инвариантность формы первого дифференциала.
42. Параметрически заданные кривые и функции, их дифференцирование.
43. Производные и дифференциалы высших порядков.
44. Возрастание (убывание) функции в точке. Локальный экстремум.
45. Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой в данной точке функции.
46. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Следствия из теоремы Лагранжа (постоянство функции, имеющей на интервале равную нулю производную, условия монотонности функции на интервале, отсутствие разрывов первого рода и устранимых разрывов у производной).
47. Обобщенная формула конечных приращений (теорема Коши).
48. Раскрытие неопределенностей (правила Лопиталя).
49. Признаки монотонности функции. Отыскание стационарных точек. Первое достаточное условие экстремума. Второе достаточное условие экстремума.
50. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Необходимое условие перегиба. Первое достаточное условие перегиба. Второе достаточное условие перегиба.
51. Асимптоты графика функции. Построение графика функции. Отыскание максимального и минимального значений функции, определенной сегменте.
52. Понятие первообразной функции. Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла.
53. Интегрирование методом заменой переменной.
54. Интегрирование по частям.
55. Формула Ньютона – Лейбница.
56. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.

Выполнение и защита практических работ. Практические работы проводятся с целью усвоения и закрепления практических умений и знаний, овладения общими компетенциями. В ходе практической работы студенты приобретают умения, предусмотренные рабочей программой дисциплины, учатся использовать формулы, и применять различные методы вычислений, анализировать полученные результаты и делать выводы, опираясь на теоретические знания.

Список практических работ:

Раздел 1. Элементы линейной и векторной алгебры

Практическая работа № 1. «Действия над матрицами. Вычисление определителя. Расчет минора

Задание 1

Даны две матрицы, найдите их сумму.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Задание 2.

Даны две матрицы, найдите их разность.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Задание 3

Найдите $C=2A+3B$, если :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Даны две матрицы. Умножьте их друг на друга.

Задание 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad A*B=?, \quad B*A=?$$

Задание 5 Даны две матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Определите 1) сумму этих матриц; 2) разность матриц $A-B$; 3) произведение матриц $B*A$; 4) найдите значение $2A+4B$

Задание 6. Найдите сумму матриц A и B

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 4 & -7 & 4 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 23 \\ 23 & -6 & -11 \\ 34 & 21 & 6 \end{pmatrix}$$

Задание 7. Найдите произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 0 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ -5 & 7 & 2 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Задание 8. Найдите произведение матрицы A на 7, если $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 0 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

Задание 9. Чему равен минор элемента a_{23} матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$?

Вычисление определителя. Расчет минора

1. Чему равно алгебраическое дополнение элемента a_{31} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} ?$$

2. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

5. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

6. С помощью правила треугольников (правила Саррюса) вычислите определители матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 1/2 & 7 \\ -8 & 7 & 3/2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

А) Определите определитель матрицы $(A+B)$

Б) Определите определитель матрицы $5A$

7. Определите определитель матриц

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 4 & -7 & 4 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 23 \\ 23 & -6 & -11 \\ 34 & 21 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 0 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ -5 & 7 & 2 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Найдите определитель $3A+4B+2C+X$, (опираясь на данные в 7 задании).

Практическая работа № 2 «Вычисление обратной матрицы»

1. Найдите обратную матрицу матрице $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

2. Найдите обратную матрицу матрице $C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3. Найдите матрицу, обратную данной $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, для этого найдите определитель матрицы, составьте союзную матрицу.

4. Найдите обратную матрицу для матрицы $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Найдите обратную матрицу для матрицы $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

Раздел 2. Системы линейных уравнений.

Практическая работа № 3 «Решение методом Крамера системы линейных уравнений»

1. Решить СЛАУ методом Крамера $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2y + z + x = -1 \\ -z - y + 3x = -1 \\ -2x + 3z + 2y = 5 \end{cases}$

Практическая работа № 4. «Решение матричным методом системы линейных уравнений»

1. С помощью обратной матрицы найдите решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = \frac{5}{6} \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

2. Найдите решение системы линейных алгебраических уравнений с помощью обратной

матрицы $\begin{cases} 2y + z + x = -1 \\ -z - y + 3x = -1 \\ -2x + 3z + 2y = 5 \end{cases}$

3. Найдите решение системы $\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 5z = 23 \\ x + 7y - z = 5 \end{cases}$

Практическая работа № 5 «Решение систем линейных уравнений методом Гаусса»

1. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$

2. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$.

Составьте расширенную матрицу системы.

3. Решите методом Гаусса систему уравнений $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$

4. Решите методом Гаусса систему уравнений $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$

Раздел 3. Теория пределов**Практическая работа № 6 «Первый и второй замечательные пределы»**

1. Чему равен предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$?

2. Чему равен предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-1}{2x+5}$?

3. Чему равен предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+7x}-1}{x}$?

4. Чему равен предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$:

5. Чему равен предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$:

6. Чему равен предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$:

7. Чему равен предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x$:

Практическая работа № 7 «Приемы для раскрытия неопределенностей. Принцип замены эквивалентными»

Далее приводится таблица функций, эквивалентных при $t \rightarrow 0$. Здесь t может быть как переменной, так и бесконечно малой функцией $t = t(x)$ при $x \rightarrow x_0$: $\lim_{x \rightarrow x_0} t(x) = 0$;

$a > 0, a \neq 0$.

Эквивалентность при $t \rightarrow 0$	Равенство при $t \rightarrow 0$
$\sin t \sim t$	$\sin t = t + o(t)$
$\arcsin t \sim t$	$\arcsin t = t + o(t)$
$\operatorname{tg} t \sim t$	$\operatorname{tg} t = t + o(t)$
$\operatorname{arctg} t \sim t$	$\operatorname{arctg} t = t + o(t)$
$1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2}$	$1 - \cos t = \frac{t^2}{2} + o(t^2)$
$e^t - 1 \sim t$	$e^t - 1 = t + o(t)$
$a^t - 1 \sim t \ln a$	$a^t - 1 = t \ln a + o(t)$
$\ln(1+t) \sim t$	$\ln(1+t) = t + o(t)$
$\log_a(1+t) \sim \frac{t}{\ln a}$	$\log_a(1+t) = \frac{t}{\ln a} + o(t)$
$(1+t)^\beta - 1 \sim \beta t$	$(1+t)^\beta - 1 = \beta t + o(t)$
$\operatorname{sh} t \sim t$	$\operatorname{sh} t = t + o(t)$
$\operatorname{arsh} t \sim t$	$\operatorname{arsh} t = t + o(t)$
$\operatorname{th} t \sim t$	$\operatorname{th} t = t + o(t)$
$\operatorname{arth} t \sim t$	$\operatorname{arth} t = t + o(t)$
$\operatorname{ch} t - 1 \sim \frac{t^2}{2}$	$\operatorname{ch} t - 1 = \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

В качестве примера рассмотрим следующий предел:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

При $x \rightarrow 0$, $\sin x \sim x$. Но если заменить в числителе $\sin x$ на x , то получим ошибку:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^3} = 0.$$

Ошибки не будет, если выразить синус через эквивалентную функцию и o малое, $\sin x = x + o(x)$:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{o(x)}{x}}{x^2}.$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, то мы снова получили неопределенность $0/0$. Это указывает на то, что для вычисления этого предела применение эквивалентной функции не достаточно. Нужно применить другой метод.

Можно решить этот пример **разложением в ряд Маклорена**:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^3/6 + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3/6 + o(x^4)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{6} + x \cdot \frac{o(x^4)}{x^4} \right) = -\frac{1}{6} + 0 \cdot 0 = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Также можно применить **правило Лопиталья**:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(3x^2)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Разложение элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена)

Далее приводятся разложения элементарных функций в степенной ряд при $x \rightarrow 0$. Как мы упоминали ранее, ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$ называется рядом Маклорена.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \dots + C_a^n x^n + o(x^n),$$

$$\text{где } C_a^n = \frac{a(a-1)\dots(a-(n-1))}{n!};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} + o(x^{2n}),$$

$$\text{где } B_n - \text{числа Бернулли: } B_0 = 1, \quad 1 + C_n^1 B_1 + C_n^2 B_2 + \dots$$

$$+ C_n^{n-1} B_{n-1}, \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!};$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3} x - \frac{1}{45} x^3 - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} + o(x^{2n});$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2});$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x;$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2});$$

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x;$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 - \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} + o(x^{2n}),$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3} x - \frac{1}{45} x^3 + \dots + \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} + o(x^{2n});$$

$$\operatorname{arsh} x = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2});$$

$$\operatorname{arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

Задание 1. Найдите предел

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin 3x \sin 5x}{\sin x^3}.$$

Решение.

Из таблицы эквивалентных функций имеем:

$$\sin x \sim x, \sin 3x \sim 3x, \sin 5x \sim 5x, \sin x^3 \sim x^3.$$

Поскольку исходная функция является дробью и каждая из этих функций входит в нее в виде множителя в числителе или знаменателе, то заменим их на эквивалентные.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin 3x \sin 5x}{\sin x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 3x \cdot 5x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{15x^3}{x^3} = 15.$$

Задание 2.

Найти предел:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \ln^2(1+2x)}{(1-\cos x) \operatorname{tg} 4x}.$$

Решение.

$$\sin 5x \sim 5x, \ln(1+2x) \sim 2x, 1-\cos x \sim x^2/2, \operatorname{tg} 4x \sim 4x.$$

Преобразуем квадрат логарифма:

$$\ln^2(1+2x) = (\ln(1+2x))^2 \sim (2x)^2 = 4x^2.$$

Поскольку исходная функция является дробью и каждая из этих функций входит в нее в виде множителя в числителе или знаменателе, то заменим их на эквивалентные.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \ln^2(1+2x)}{(1-\cos x) \operatorname{tg} 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot 4x^2}{\frac{x^2}{2} \cdot 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20x^3}{2x^3} = 10.$$

Задание 3. Вычислить предел, используя разложение в ряд Тейлора.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \ln(1+x) - 1}{1-\cos x}.$$

Решение.

Это неопределенность вида 0/0. Используем следующие разложения функций в окрестности точки $x = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

Раскладываем с точностью до квадратичных членов:

$$e^x - \ln(1+x) - 1 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - 1 = x^2 + o(x^2);$$

$$1 - \cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3) \right) = \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Делим числитель и знаменатель на x^2 и находим предел:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{o(x^2)}{x^2}}{\frac{1}{2} + x \cdot \frac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{1 + 0}{\frac{1}{2} + 0 \cdot 0} = 2.$$

Раздел 4. Дифференциальное и интегральные исчисление.

Практическая работа № 8 «Правила нахождения производной для суммы, произведения, частного функций»

$$1. y = 3x^2 + x - 1.$$

$$[y' = 6x + 1.]$$

$$2. y = 6x^3 + x^2.$$

$$[y' = 18x^2 + 2x.]$$

$$3. y = \frac{x^5 - x^2 + 2}{6}.$$

$$\left[y' = \frac{5x^4 - 2x}{6} \right]$$

$$4. y = 2x^4 - \frac{x^2}{3} + 1.$$

$$\left[y' = 8x^3 - \frac{2}{3}x \right]$$

$$5. y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}} + 3x + 4.$$

$$\left[y' = 21x^{\frac{5}{2}} + 10x^{\frac{3}{2}} + 3 \right]$$

$$6. y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x}.$$

$$\left[y' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x^2} \right]$$

$$7. y = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 7.$$

$$\left[y' = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right]$$

$$8. y = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2).$$

$$[y' = 4x(1 + 3x + 10x^3).]$$

$$9. y = x(2x - 1)(3x + 2).$$

$$[y' = 2(9x^2 + x - 1).]$$

Практическая работа № 9 «Производная сложной функции. Вычисление второй производной функций»

$$1. y = (2x - 1)(x^2 - 6x + 3)$$

$$[y' = 6x^2 - 26x + 12.]$$

$$2. y = \frac{1-x}{1+x}.$$

$$\left[y' = -\frac{2}{(1+x)^2} \right]$$

$$3. y = \frac{2x^4}{1-x^2}.$$

$$\left[y' = \frac{4x^3(2-x^2)}{(1-x^2)^2} \right]$$

4. $y = \frac{x^3}{1+x^2}.$	$\left[y' = \frac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2}. \right]$
5. $y = \frac{(x+4)^2}{x+3}.$	$\left[y' = \frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}. \right]$
6. $y = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^3.$	$\left[y' = -6 \frac{(1-x)^2}{(1+x)^4}. \right]$
7. $y = \frac{x^3+1}{x^2-x-2}.$	$\left[y' = \frac{x^4-2x^3-6x^2-2x+1}{(x^2-x-2)^2}. \right]$
8. $y = (2x^2-3)^3.$	$\left[y' = 12x(2x^2-3)^2. \right]$

Практическая работа № 10 «Вычисление неопределенных интегралов.»

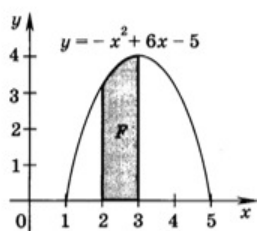
- | | |
|--|---|
| 1. $\int x^2 dx.$ | 13. $\int \sqrt{x} dx.$ |
| 2. $\int \frac{dx}{x}.$ | 14. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$ |
| 3. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}.$ | 15. $\int (x^3 + 5x^2 - 3x + 1) dx.$ |
| 4. $\int (3 - x^2)^3 dx.$ | 16. $\int (x^2 - 3)(x - 1) dx.$ |
| 5. $\int \frac{x^2 - 5x + 4}{x} dx.$ | 17. $\int \frac{(x-1)^3}{x} dx.$ |
| 6. $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}) dx.$ | 18. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}} dx.$ |
| 7. $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx.$ | 19. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x} dx.$ |
| 8. $\int e^{-x} dx.$ | 20. $\int (e^{-x} + e^{2x}) dx.$ |
| 9. $\int (e^{-x} + e^x)^2 dx.$ | 21. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx.$ |
| 10. $\int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx.$ | 22. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}}.$ |
| 11. $\int \frac{dx}{x^2+2}.$ | 23. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}.$ |
| 12. $\int \sin 8x dx.$ | 24. $\int 2^x dx.$ |

Практическая работа № 11 «Вычисление определенного интеграла методами замены и интегрирования по частям»

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3}}.$
2. $\int \frac{dx}{x^2 - 9}.$
3. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}.$
4. $\int e^{3x+5} dx.$
5. $\int \sqrt{x+1} dx.$
6. $\int x(x^2 + 1)^4 dx.$
7. $\int \frac{xdx}{x^2 + 2}.$
8. $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right)^7 \frac{dx}{x^2}.$
9. $\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}.$
10. $\int \frac{x^4 dx}{x^2 - 1}.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x}}.$
12. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}.$
13. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}.$
14. $\int \frac{dx}{\sin^2 7x}.$
15. $\int \cos 4x dx.$
16. $\int (1 + \sin x + \cos x) dx.$
17. $\int 2^x \cdot 3^{2x} dx.$
18. $\int \sqrt{1 - 3x} dx.$
19. $\int \frac{dx}{(x - 2)^3}.$
20. $\int x \sqrt{1 + x^2} dx.$
21. $\int \frac{dx}{x + 3}.$
22. $\int \frac{x^2}{1 + x} dx.$
23. $\int 5^x \left(3 + \frac{5^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right) dx.$
24. $\int \frac{(1 + \ln x)^2 dx}{x}.$
25. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$
26. $\int \frac{\ln x}{x} dx.$

Практическая работа № 12 «Расчет определённых интегралов по формуле Ньютона-Лейбница»

1. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями: $y = 3x + 18 - x^2$, $y = 0$.
2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, графиком функции $y=f(x)$ и осью Ox : $a=0$, $b=2$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
3. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, графиком функции $y=f(x)$ и осью Ox : $a=1$, $b=3$, $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
4. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями: $y = 5x + 14 - x^2$, $y = 0$.
5. Вычислить площадь фигуры F , изображенной на рисунке.



Практическая работа №8 «Вычисление определенного интеграла методами замены и интегрирования по частям»

Методы решения интегралов

1. Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование – метод интегрирования, при котором подынтегральная функция путем тождественных преобразований и применения [свойств интеграла](#) приводится к одному или нескольким [табличным интегралам](#).

ПРИМЕР 1

Задание Найти [интеграл](#)

$$\int \frac{x^2 + x \sin x}{x} dx$$

Решение Почленно поделим подынтегральную функцию:

$$\int \frac{x^2 + x \sin x}{x} dx = \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{x \sin x}{x} \right) dx$$

[Интеграл от суммы](#) равен сумме интегралов:

$$\int \frac{x^2 + x \sin x}{x} dx = \int x dx +$$

Получили сумму табличных интегралов, поэтому и

$$\int \frac{x^2 + x \sin x}{x} dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$$

Ответ
$$\int \frac{x^2 + x \sin x}{x} dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$$

2. Метод подведения под знак дифференциала

Метод подведения под знак дифференциала. Этот метод является эквивалентным методу под

$$\int f(x) dx = \int v(u(x)) dx \cdot \frac{d(u(x))}{d(u(x))} = \int v(u(x)) \cdot \frac{d(u(x))}{\frac{d(u(x))}{dx}} = \int v(u(x)) du$$

Задание Решить интеграл $\int x \sin x^2 dx$

Решение Внесем x под знак дифференциала:

$$x dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} d(x^2)$$

Тогда будем иметь:

$$\int x \sin x^2 dx = \int \sin x^2 \cdot \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2} \int \sin t dt$$

Согласно [таблице интегралов](#)

$$\int \sin t dt = -\cos t + C$$

Тогда при $t = x^2$ имеем:

$$\int x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int \sin x^2 d(x^2) = \frac{1}{2} \cdot (-\cos x^2) + C$$

Ответ $\int x \sin x^2 dx = -\frac{\cos x^2}{2} + C$

3. Метод замены переменной или метод подстановки

Метод замены переменной или метод подстановки. Этот метод заключается во введении новой переменной интегрирования (то есть делается подстановка). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или с помощью преобразований его можно свести к табличному.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x) dx$. Сделаем подстановку $x = \phi(t)$. Тогда $dx = \phi'(t) dt$ и интеграл

$$\int f(x) dx = \int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt$$

принимает вид:

Задание Найти интеграл

$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

Решение Как видим под знаком интеграла стоит функция $f(x) = \ln x$ и ее [прс](#). Тогда делаем замену переменных $\ln x = t$, тогда дифференциал $\frac{dx}{x} = dt$

Итак, интеграл принимает вид:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \int t dt = \frac{t^2}{2} +$$

[Неопределенный интеграл](#) зависит от переменной интегрирования, по $t = \ln x$:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

Ответ $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

4. Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям. Этот метод основывается на следующей формуле:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

или

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx$$

При этом предполагается, что нахождение интеграла $\int v du$ проще, чем исходного интеграла $\int u dv$. В противном случае применение метода неоправданно.

Задание Решить интеграл $\int x \sin x dx$

Решение Применим метод интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx & \left\| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \sin x dx \\ du = dx \quad v = -\cos x \end{array} \right\| = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) dx \\ & = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

Ответ $\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$

§4 Метод интегрирования

п.1 Метод разложения

Метод основан на свойствах
неопределенного интеграла.

$$\int \left(\frac{3}{1+x^2} + 6\cos x + \sqrt{x} \right) dx = \int \frac{3}{1+x^2} dx + \int 6\cos x dx + \int \sqrt{x} dx$$

$$= 3 \int \frac{dx}{1+x^2} + 6 \int \cos x dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = 3 \arctg x + 6 \sin x + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

Методы интегрирования: метод подведения под знак

Пример 3. Найти $\int (x+5)^{16} dx$.

$$\int (x+5)^{16} dx = \int (x+5)^{16} d(x+5) = \frac{(x+5)^{17}}{17} + C, C \in R; \quad \forall x \in R$$

Пример 4. Найти $\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$.

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \int \frac{d(e^x)}{e^x - 1} = \int \frac{d(e^x - 1)}{e^x - 1} = \ln|e^x - 1| + C, C \in R; \quad \forall x \in R$$

Пример 5. Найти $\int \cos 3x dx$.

$$\int \cos 3x dx = \int \cos 3x \cdot \frac{1}{3} d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x + C, C \in R; \quad \forall x \in R$$

Пример 7. Найти $\int \sqrt{8-7x} dx$.

$$\int \sqrt{8-7x} dx = \int (8-7x)^{1/2} \left(-\frac{1}{7} \right) d(8-7x) = -\frac{1}{7} \cdot \frac{(8-7x)^{3/2}}{3/2} + C$$

Примеры интегрирования методом интегрирования по частям

Пример 11. Найдем неопределенный интеграл

$$\int x e^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = e^{2x} dx \\ du = dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C.$$

Пример 12. Найдем неопределенный интеграл

$$\begin{aligned} \int \ln(x-1) dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln(x-1) \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{x-1} \quad v = x \end{array} \right| = x \ln(x-1) - \int \frac{x}{x-1} dx \\ &= x \ln(x-1) - \int \frac{x-1+1}{x-1} dx = x \ln(x-1) - \int (1 + \frac{1}{x-1}) dx = x \ln(x-1) - x + \ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

Интегралы от рациональных функций

Пример 15. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{4dx}{5x+3}$.
Используем линейную замену переменных.

$$\int \frac{4dx}{5x+3} = 4 \cdot \frac{1}{5} \int \frac{5dx}{5x+3} = \left| \begin{array}{l} u = 5x+3 \\ du = 5dx \end{array} \right| = \frac{4}{5} \int \frac{du}{u} = \frac{4}{5} \ln|u| + C = \frac{4}{5} \ln|5x+3| + C.$$

Пример 16. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{7dx}{(3x-2)^2}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{7dx}{(3x-2)^2} &= 7 \cdot \frac{1}{3} \int \frac{3dx}{(3x-2)^2} = \left| \begin{array}{l} u = 3x-2 \\ du = 3dx \end{array} \right| = \frac{7}{3} \int \frac{du}{u^2} = \\ &= -\frac{7}{3(3x-2)} + C = -\frac{7}{9x-6} + C. \end{aligned}$$

Интегрирование по частям

Найдите следующие интегралы:

1) $\int x \sin x \, dx$.

Решение:

Пусть $u = x$, $dv = \sin x \, dx$; тогда $du = dx$, $\int dv = \int \sin x \, dx$, т.е.
Используя формулу (1), получим: $v = -\cos x$.

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x$$

2) $\int \frac{\ln x \, dx}{x^2}$.

Решение:

Пусть $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^2}$; тогда $du = \frac{dx}{x}$, $\int dv = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} \, dx$

Используя формулу (1), получим:

$$\int \frac{\ln x \, dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} \, dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

Примеры. Найти интегралы:

а) $\int (x^3 - 3x^2 + 4x - 5) \, dx = \int x^3 \, dx - \int 3x^2 \, dx + \int 4x \, dx - \int 5 \, dx$
 $= \int x^3 \, dx - 3 \int x^2 \, dx + 4 \int x \, dx - 5 \int 1 \, dx$
 $= \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3 \frac{x^{2+1}}{2+1} + 4 \frac{x^{1+1}}{1+1} - 5x + C = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{2} + 2x^2 - 5x + C$

б) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{x} + 3\sqrt{x^3} - \frac{4}{\sqrt[5]{x^3}} \right) dx = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} - \int \frac{2dx}{x} + \int 3\sqrt{x^3} \, dx - \int \frac{4dx}{\sqrt[5]{x^3}}$
 $= \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} - 2 \int \frac{dx}{x} + 3 \int \sqrt{x^3} \, dx - 4 \int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{1}{3}} \, dx - 2 \int \frac{dx}{x} + 3 \int x^{\frac{3}{2}} \, dx - 4 \int x^{-\frac{3}{5}} \, dx$

$$\begin{aligned}
 -4 \int x^{-\frac{3}{5}} dx &= \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} - 2 \ln |x| + 3 \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 4 \frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + C = \\
 &= \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} - 2 \ln |x| + 3 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 4 \frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} - 2 \ln |x| + \frac{3}{2} \sqrt[5]{x^2} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{В)} \quad \int \frac{dx}{9x^2 - 1} &= \int \frac{1}{9} \cdot \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \\
 &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)} \ln \left| \frac{x - \frac{1}{3}}{x + \frac{1}{3}} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x - \frac{1}{3}}{x + \frac{1}{3}} \right| + C
 \end{aligned}$$

$$1.1. \text{ а)} \int (6x^2 + 8x + 3) dx; \quad \text{б)} \int \frac{dx}{x^2 + 7}; \quad \text{в)} \int (\sqrt{5} - \frac{1}{x^2}) dx;$$

$$1.2. \text{ а)} \int \frac{2x+3}{x^4} dx; \quad \text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}; \quad \text{в)} \int \frac{(1-x)^2}{x} dx;$$

$$1.3. \text{ а)} \int (2x + 3 \cos x) dx; \quad \text{б)} \int \frac{dx}{7x^2 - 8}; \quad \text{в)} \int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x} dx;$$

$$1.4. \text{ а)} \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}; \quad \text{в)} \int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx;$$

$$1.5. \text{ а)} \int \left(\frac{x^2-9}{x^2-8} \right) dx; \quad \text{б)} \int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx; \quad \text{в)} \int \frac{tg x}{1+tg^2 x} dx;$$

$$1.6. \text{ а)} \int \frac{(1+2x^2) \cdot dx}{x^2 \cdot (1+x^2)}; \quad \text{б)} \int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx; \quad \text{в)} \int \left(\sin x - \frac{1}{x} \right) dx;$$

Ответы

$$1.1. \text{ а)} 2x^3 + 4x^2 + 3x + C; \quad \text{б)} \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} + C; \quad \text{в)} \frac{2x^2}{5} + \ln |x| + C;$$

$$1.2. \text{ а)} -1/x^2 - 1/x^3 + C; \quad \text{б)} \ln(x + \sqrt{4+x^2}) + C; \quad \text{в)} \frac{2x^2-1}{3} + C;$$

$$1.3. \text{ а)} x^2 + 3 \sin x + C; \quad \text{б)} \frac{1}{4\sqrt{14}} \cdot \ln \left| \frac{x\sqrt{7} - 2\sqrt{2}}{x\sqrt{7} + 2\sqrt{2}} \right| + C; \quad \text{в)} 2 \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{x} + C;$$

$$1.4. \text{ а)} \frac{6}{7} \cdot \sqrt[6]{x^7} - \frac{4}{3} \cdot \sqrt[4]{x^3} + C; \quad \text{б)} \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin x \sqrt{\frac{5}{7}} + C; \quad \text{в)} x + 3 \ln |x| + C;$$

$$\begin{array}{lll}
1.7. \text{ а) } \int \left(3x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx; & \text{ б) } \int \frac{dx}{x^2 - 10}; & \text{ в) } \int \left(\frac{1-x}{x} \right) \\
1.8. \text{ а) } \int \frac{x^3 + 2}{x} dx; & \text{ б) } \int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}; & \text{ в) } \int \frac{(x^2 + 2)}{\sqrt{8-x^2}} \\
1.9. \text{ а) } \int \frac{2 - \sin x}{\sin^2 x} dx; & \text{ б) } \int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}; & \text{ в) } \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) \\
1.10. \text{ а) } \int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}} dx; & \text{ б) } \int \frac{dx}{3x^2 + 5}; & \text{ в) } \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \\
1.11. \text{ а) } \int \frac{(1+x)^2 \cdot dx}{x \cdot (1+x^2)}; & \text{ б) } \int \frac{\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}} dx; & \text{ в) } \int \frac{1}{\cos 2x}
\end{array}$$

Ответы

$$\begin{array}{lll}
1.7. \text{ а) } x^3 + x^2 + \ln |x| + C; & \text{ б) } \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{10}}{x + \sqrt{10}} \right| + C; & \text{ в) } x - 21 \\
1.8. \text{ а) } \frac{x^3}{3} + 2 \ln |x| + C; & \text{ б) } \arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}} + C; & \text{ в) } \frac{3x^4}{10} \\
1.9. \text{ а) } -2 \operatorname{ctg} x - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C; & \text{ б) } \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(2\sqrt{2}x + \sqrt{7+8x^2} \right) + C; & \text{ в) } 3 \cdot \sqrt[3]{x} \\
1.10. \text{ а) } \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7} x \sqrt[6]{x} + \frac{9}{5} x \sqrt[3]{x^2} + \frac{16}{3} x^2 \sqrt[6]{x} + C; & \text{ б) } \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} x \sqrt{\frac{3}{5}} + C; & \\
1.11. \text{ а) } \ln |x| + 2 \operatorname{arctg} x + C; & \text{ б) } \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 3} \right) - \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 3} \right| + C; &
\end{array}$$

2. Метод подстановки

Если функция $x = \psi(t)$ дифференцируема и имеет на соответствующем промежутке, то справедливо равен

$$\int f(x) dx = \left[\begin{array}{l} x = \psi(t) \\ dx = \psi'(t) dt \end{array} \right] = \int f(\psi(t)) \psi'(t) dt = \int g(t) dt$$

Функция $x = \psi(t)$ подбирается таким образом, чтобы выражение приняло более удобный для интегрирования вид. В зависимости от конкретного вида подынтегрального выражения

Примеры. Найти интегралы:

$$\begin{aligned}
 1) \int \cos(3x+2) dx &= \left[\begin{array}{l} 3x+2=t \\ (3x+2)' dx = dt \Rightarrow 3dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right] \\
 &= \int \frac{1}{3} \cos t dt = \frac{1}{3} \int \cos t dt = \frac{1}{3} \sin t + C = \frac{1}{3} \sin(3x+2) + C \\
 2) \int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx &= \left[\begin{array}{l} 1+\ln x=t \\ (1+\ln x)' dx = dt \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right] \\
 &= \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} (1+\ln x)^{\frac{4}{3}} + C
 \end{aligned}$$

1.3. Интегрирование по частям. Если $u(x)$ и $v(x)$ — функции, то справедлива **формула интегрирования по частям**

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

или кратко: $\int u dv = uv - \int v du$.

Примеры. Найти интегралы:

$$\begin{aligned}
 1) \int (x+1) \cos x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x+1, du = (x+1)' dx = dx, \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right] = \\
 &= (x+1) \sin x + \cos x + C; \\
 2) \int (x^3+1) \ln x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln x, du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx \\ dv = (x^3+1) dx \Rightarrow v = \int (x^3+1) dx = \frac{x^4}{4} + x \end{array} \right] = \\
 &= \ln x \cdot \left(\frac{x^4}{4} + x \right) - \int \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \cdot \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot \left(\frac{x^4}{4} + x \right) - \int \left(\frac{x^3}{4} + 1 \right) dx = \\
 &= \ln x \cdot \left(\frac{x^4}{4} + x \right) - \frac{x^4}{16} - x + C
 \end{aligned}$$

Задачи. Методом интегрирования по частям интегралы:

- 1.1. а) $\int (x-7) \cdot \sin x dx$; б) $\int x^2 \cdot \ln x dx$.
 1.2. а) $\int (4-x) \cdot e^{-3x} dx$; б) $\int \arctg x dx$.
 1.3. а) $\int (x+2) \cdot 3^x dx$; б) $\int \ln(1+x^2) dx$.
 1.4. а) $\int x^2 \cdot \cos x dx$; б) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$.
 1.5. $\int \frac{x}{\sin^2 3x} dx$. 1.6. $\int e^{ax} \cdot \sin bx dx$. 1.7.

Ответы

- 1.1. а) $(7-x) \cos x + \sin x + C$; б) $\frac{1}{9} x^3 \cdot (3 \ln x - 1)$
 1.2. а) $\frac{1}{9} (3x-11) e^{-3x} + C$; б) $x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
 1.3. а) $\frac{3^x [(x+2) \ln 3 - 1]}{\ln^2 3} + C$; б) $x \ln(1+x^2) - 2$
 1.4. а) $(x^2-2) \sin x + 2x \cos x + C$; б) $x \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
 1.5. $-\frac{1}{3} x \operatorname{ctg} 3x + \frac{1}{9} \ln |\sin 3x| + C$. 1.6. $\frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$
 1.7. $\frac{3^x (\sin x + \cos x \ln 3)}{1 + (\ln 3)^2} + C$.

Практическая работа № 10 «Производная сложной функции. Вычисление второй производной функций»

1. $y = (2x-1)(x^2-6x+3)$ $[y' = 6x^2 - 26x + 12]$

2. $y = \frac{1-x}{1+x}$ $\left[y' = -\frac{2}{(1+x)^2} \right]$

3. $y = \frac{2x^4}{1-x^2}$ $\left[y' = \frac{4x^3(2-x^2)}{(1-x^2)^2} \right]$

4. $y = \frac{x^3}{1+x^2}$ $\left[y' = \frac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2} \right]$

5. $y = \frac{(x+4)^2}{x+3}$ $\left[y' = \frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2} \right]$

6. $y = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^3$ $\left[y' = -6 \frac{(1-x)^2}{(1+x)^4} \right]$

$$7. y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}.$$

$$\left[y' = \frac{x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x - 2)^2} \right]$$

$$8. y = (2x^2 - 3)^3.$$

$$\left[y' = 12x(2x^2 - 3)^2 \right].$$

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3}}.$$

$$2. \int \frac{dx}{x^2 - 9}.$$

$$3. \int \frac{dx}{\cos^2 3x}.$$

$$4. \int e^{3x+5} dx.$$

$$5. \int \sqrt{x+1} dx.$$

$$6. \int x(x^2 + 1)^4 dx.$$

$$7. \int \frac{x dx}{x^2 + 2}.$$

$$8. \int \left(1 - \frac{1}{x}\right)^7 \frac{dx}{x^2}.$$

$$9. \int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}.$$

$$10. \int \frac{x^4 dx}{x^2 - 1}.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}.$$

$$12. \int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}.$$

$$13. \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sin^2 7x}.$$

$$15. \int \cos 4x dx.$$

$$16. \int (1 + \sin x + \cos x) dx.$$

$$17. \int 2^x \cdot 3^{2x} dx.$$

$$18. \int \sqrt{1-3x} dx.$$

$$19. \int \frac{dx}{(x-2)^3}.$$

$$20. \int x\sqrt{1+x^2} dx.$$

$$21. \int \frac{dx}{x+3}.$$

$$22. \int \frac{x^2}{1+x} dx.$$

$$23. \int 5^x \left(3 + \frac{5^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right) dx.$$

$$24. \int \frac{(1 + \ln x)^2 dx}{x}.$$

$$25. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$$

$$26. \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

Раздел 5 Интегральное исчисление.

Практическая работа № 11 «Вычисление неопределенных интегралов.»

$$1. \int x^2 dx.$$

$$2. \int \frac{dx}{x}.$$

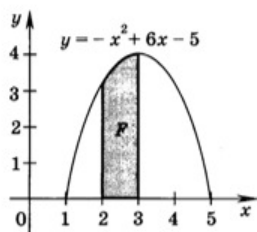
$$13. \int \sqrt{x} dx.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}.$
4. $\int (3-x^2)^3 dx.$
5. $\int \frac{x^2-5x+4}{x} dx.$
6. $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}) dx.$
7. $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx.$
8. $\int e^{-x} dx.$
9. $\int (e^{-x} + e^x)^2 dx.$
10. $\int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx.$
11. $\int \frac{dx}{x^2+2}.$
12. $\int \sin 8x dx.$
15. $\int (x^3 + 5x^2 - 3x + 1) dx.$
16. $\int (x^2 - 3)(x-1) dx.$
17. $\int \frac{(x-1)^3}{x} dx.$
18. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}} dx.$
19. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} dx.$
20. $\int (e^{-x} + e^{2x}) dx.$
21. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx.$
22. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}.$
23. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}.$
24. $\int 2^x dx.$

Практическая работа № 13 «Расчет определённых интегралов по формуле Ньютона-Лейбница»

6. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями: $y = 3x + 18 - x^2$, $y = 0$.
7. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, графиком функции $y=f(x)$ и осью Ox : $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
8. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, графиком функции $y=f(x)$ и осью Ox : $a = 1$, $b = 3$, $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
9. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями: $y = 5x + 14 - x^2$, $y = 0$.
10. Вычислить площадь фигуры F , изображенной на рисунке.



Раздел 5 Дифференциальное и интегральные исчисление функции нескольких переменных

Практическая работа № 13. «Вычисление предела функции.»

Задание 1. Найти частные производные функции

$$z = x^3 y^2 + 5x^2 y^3 + 4x - 3y + 2.$$

Решение. Считая величину y постоянной, получаем $z'_x = 3x^2 y^2 + 10xy^3 + 4$.

Считая величину x постоянной, получаем $z'_y = 2x^3 y + 15x^2 y^2 + 4$.

Задание 2. Найти все вторые частные производные от функции $z = \sin(xy)$

Задание 3. Найти частную производную $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$ от функции $z = e^x (\cos y + x \sin y)$

Раздел 7 Интегральное исчисление функции нескольких переменных

Практическая работа № 14 «Вычисления двойных интегралов»

Задание 1. Вычислите интеграл $\int_D \int \frac{dx dy}{(x+y)^2}$, распространённый на прямоугольник $D = [3, 4; 1, 2]$

Задание 2. Вычислите интеграл $\int_D \int (x+2y) dx dy$, область D ограничена линиями $y = x^2, y = 0, x + y - 2 = 0$

Задание 3. Вычислите интеграл $\int_1^3 \int_2^5 (5x^2 y - 2y^3) dx dy$

Задание 4. Вычислите интеграл $\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 dx dy}{1+y^2}$

Раздел 6 Теория рядов

Практическая работа № 15 «Исследование ряда на абсолютную и условную сходимость»

Задание 1.

Определить, является ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся?

Решение.

Сначала применим признак Лейбница:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = 0.$$

Следовательно, данный ряд сходится. Выясним, является ли эта сходимость абсолютной или условной.

Вспользуемся предельным признаком сравнения и сравним соответствующий ряд из модулей

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = 1.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, составленный из модулей, расходится, то исходный знакочередующийся ряд является условно сходящимся.

Задание 2.

Исследовать, является ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n-1}$ абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся?

Решение.

Применяя признак Лейбница, видим, что ряд является сходящимся:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{5n-1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5n-1} = 0.$$

Рассмотрим теперь сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{5n-1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-1}$, составленного из модулей соответствующих

членов. Используя интегральный признак сходимости, получаем

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{5x-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{5x-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{5} \ln |5x-1| \right]_1^n = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(5n-1) - \ln 4] = \infty.$$

Следовательно исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n-1}$ сходится условно.

Задание 3.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$.

Решение.

Применим достаточный признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n}{n} = 0,$$

поскольку $\sin^2 n \leq 1$. Следовательно, данный ряд сходится.

Задание 4.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3n+2}$.

Решение.

Попробуем применить признак Лейбница:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{n}}{\frac{3n+2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Видно, что модуль общего члена не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Поэтому данный ряд расходится.

Задание 5.

Исследовать знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n}$ на сходимость.

Решение. Запишем данный ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{18} - \frac{1}{81} + \frac{1}{324} - \dots$$

Члены этого ряда убывают по абсолютной величине:

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{18} > \frac{1}{81} > \frac{1}{324} \dots$$

Общий член ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot 3^n} = 0.$$

Значит, знакочередующийся ряд сходится.

Составим ряд из абсолютных величин членов этого ряда:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{81} + \frac{1}{324} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}.$$

Сходимость этого ряда исследуем по признаку Даламбера:

$$u_n = \frac{1}{n \cdot 3^n}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot 3^{n+1}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 3^n}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3(n+1)} = \frac{1}{3} < 1.$$

Значит, ряд сходится, поэтому знакочередующийся ряд абсолютно сходится.

Раздел 7 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Практическая работа № 16 «Решение задач на нахождение общих интегралов дифференциального уравнения.»

Пример. Найдите общий интеграл интегрального уравнения.

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$$

Решение:

Введем замену $t = \frac{y}{x}; y' = t'x + t$

$$t'x + t = t^2 + 4t + 2$$

$$t'x = t^2 + 3t + 2$$

$$\frac{dt}{dx}x = t^2 + 3t + 2$$

$$\frac{dt}{t^2 + 3t + 2} = \frac{dx}{x}$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$\int \frac{dt}{t^2 + 3t + 2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dt}{(t+2)(t+1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln \frac{t+1}{t+2} = \ln x + \ln C$$

$$\frac{y+x}{y+2x} = Cx$$

Ответ:

$$\frac{y+x}{y+2x} = Cx$$

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$3xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$$

2. Найти решение задачи Коши

$$y' + \frac{y}{x} = \sin 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

3. Найти решение задачи Коши

$$y'' = \frac{\ln x}{x},$$

$$y(1) = y'(1) = 0.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 100y = 20\sin 10x - 30\cos 10x - 200e^{10x}.$$

Раздел 8 Аналитическая геометрия

Практическая работа № 17 «Вычисление точек пересечения прямых на плоскости»

1. Начертите график функции $y=x+2$

2. Среди прямых, заданных уравнениями, укажите пары параллельных прямых: 1) $x+y=2$; 2) $y-x=2$; 3) $x-y=3$; 4) $y=1$; 5) $y=3$; 6) $2x+2y+5=0$.

3. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

4. Найти уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$ и $x^2 + y^2 + 10x + 4y + 13 = 0$.
5. Найти точки пересечения окружности $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$ и прямой $y = x - 3$.
6. Найти уравнение общей хорды окружностей $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$.
7. Найти центр и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(0;2)$, $B(1;1)$, $C(2;-2)$.
8. Составить уравнение окружности, касающейся прямых $2x \mp y - 5 = 0$ и $2x + y + 15 = 0$, причем одной из них - в точке $A(2;1)$.
9. Найти угол между радиусами окружности $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 - 25 = 0$, проведенными в точках пересечения с осью Ox .

Проверка выполнения самостоятельной работы. Самостоятельная работа направлена на самостоятельное освоение и закрепление обучающимися практических умений и знаний, овладение общими компетенциями.

Самостоятельная подготовка обучающихся по дисциплине предполагает следующие виды и формы работы:

- решение задач с целью подготовки к контрольной работе.

Перечень задач для подготовки к контрольной работе

1. Вычислить следующие пределы.

- | | |
|---|--------------------------------|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 10x}.$ | $\left[\frac{1}{2}. \right]$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}.$ | $[-3.]$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$ | $\left[\frac{1}{2}. \right]$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}.$ | $[1.]$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}.$ | $[0.]$ |
| 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}.$ | $[0.]$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^n \ln x (n > 0)$ | $[0.]$ |
| 8. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right).$ | $\left[\frac{1}{6}. \right]$ |
| 9. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$ | $[0.]$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$ | $[1.]$ |
| 11. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}.$ | $\left[-\frac{3}{5}. \right]$ |

12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1}.$ $\left[\frac{1}{n} \right]$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}.$ $\left[\frac{a^2}{b^2} \right]$
14. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x-1}{\sin 4x}.$ $\left[-\frac{1}{2} \right]$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}.$ [2.]
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}.$ [2.]
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}.$ $\left[\frac{a^2}{b^2} \right]$
18. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}.$ $\left[\frac{m}{n} \right]$
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2}.$ [0.]
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$ $\left[\frac{1}{6} \right]$
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \cos x}{x}.$ [0.]
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$ $\left[\frac{1}{3} \right]$
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$ [2.]
24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}.$ [2.]
25. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2 \frac{1}{6} \pi x}{1 - x^2}.$ $\left[\frac{\pi \sqrt{3}}{6} \right]$

2. Вычислить следующие пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - 1 + \cos 3x}{e^x - e^{-x}}.$ $\left[\frac{1}{2} \right]$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}.$ $\left[\frac{1}{120} \right]$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x^2}.$ $\left[\frac{1}{10} \right]$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 5x}.$ $\left[\frac{2}{5} \right]$
5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x^2 - 3x + 2}.$ [4.]

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{1}{3} \pi x}{1 - x^2}.$ $\left[\frac{\pi \sqrt{3}}{9} \right]$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m}{e^{ax}}; m - \text{натуральное число и } a > 0.$ $[0.]$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1+x)}$ $[+\infty.]$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}.$ $\left[\frac{\pi^2}{2} \right]$
10. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}.$ $\left[\frac{3}{5} \right]$
11. $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\ln(e^x - e^a)}{\ln(x - a)}.$ $[1.]$
12. $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}.$ $[1.]$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x.$ $\left[\frac{1}{2} \right]$
14. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$ $\left[\frac{2}{\pi} \right]$
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x \quad (a > 0).$ $[\ln a.]$
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} n^2 \left(a^{\frac{1}{x}} + a^{-\frac{1}{x}} - 2 \right) \quad (a > 0).$ $[\ln^2 a.]$
17. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right).$ $[-1.]$
18. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x - \sec x).$ $[0.]$
19. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right).$ $\left[\frac{1}{5} \right]$
20. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right).$ $\left[-\frac{1}{2} \right]$
21. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$ $[1.]$
22. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$ $\left[e^{-\frac{1}{2}} \right]$
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$ $\left[e^{-\frac{1}{6}} \right]$
24. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x)^{\cos x}.$ $[1.]$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}}.$$

[1.]

Перечень задач для подготовки к контрольной работе

Найти производные следующих функций:

$$1. y = 1 - 2x^3. \quad [y' = -6x^2.]$$

$$2. y = \frac{x+2}{x}. \quad \left[y' = -\frac{2}{x^2}. \right]$$

$$3. y = \frac{3}{x^2 - 1}. \quad \left[y' = -\frac{6x}{(x^2 - 1)^2}. \right]$$

$$4. y = \frac{1}{x^2}. \quad \left[y' = -\frac{2}{x^3}. \right]$$

$$5. y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 5. \quad \left[y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}. \right]$$

$$6. y = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{x^3}. \quad \left[y' = x^2 - \frac{9}{x^4}. \right]$$

$$7. y = \frac{2x+1}{5}. \quad \left[y' = \frac{2}{5}. \right]$$

$$8. y = x^2(2x-1). \quad [y' = 6x^2 - 2x.]$$

$$9. y = (x^3 + 3)(4x^2 - 5). \quad [y' = 20x^4 - 15x^2 + 24x.]$$

$$10. y = (x-5)^4(x+3)^5. \quad [y' = (x-5)^3(x+3)^4(9x-13).]$$

$$11. y = (x-1)\sqrt{x}. \quad \left[y' = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}. \right]$$

$$12. y = \frac{x^3 - 3}{5 - x^2}. \quad \left[y' = -\frac{x^4 - 15x^2 + 6x}{(5 - x^2)^2}. \right]$$

$$13. y = \frac{5x}{(5-2x)^3}. \quad \left[y' = \frac{5(5+4x)}{(5-2x)^4}. \right]$$

$$14. y = \frac{(3x^2 + 5)^3}{2x - 3}. \quad \left[y' = \frac{(3x^2 + 5)^2(30x^2 - 54x - 10)}{(2x - 3)^2}. \right]$$

$$15. y = \frac{2}{(x^3 + 5)^5}. \quad \left[y' = -\frac{30x^2}{(x^3 + 5)^6}. \right]$$

$$16. y = \sqrt[3]{6x^2 - 5}. \quad \left[y' = \frac{4x}{\sqrt[3]{(6x^2 - 5)^2}}. \right]$$

$$17. y = \sqrt[3]{(4+3x)^2}. \quad \left[y' = \frac{2}{\sqrt[3]{4+3x}}. \right]$$

$$18. y = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

$$19. y = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$$

$$20. y = \sin^3 x.$$

$$21. y = \sin x^2.$$

$$22. y = \cos^2 \frac{x}{2}.$$

$$23. y = \cos \frac{x^3}{2}.$$

$$24. y = x^2 \cos x.$$

$$25. y = \frac{\sin 2x}{\cos 3x}.$$

$$\left[y' = -\frac{5x}{(x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 4}}. \right]$$

$$\left[y' = \frac{5}{2(x+3)\sqrt{x^2 + x - 6}}. \right]$$

$$[y' = 3 \sin^2 x \cos x.]$$

$$[y' = 2x \cos x^2.]$$

$$\left[y' = -\frac{\sin x}{2}. \right]$$

$$\left[y' = -\frac{3}{2} x^2 \sin \frac{x^3}{2}. \right]$$

$$[y' = x(2 \cos x - x \sin x).]$$

$$\left[y' = \frac{5 \cos x - \cos 5x}{2 \cos^2 3x}. \right]$$

Найти производные следующих функций:

$$1. y = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x$$

$$2. y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}.$$

$$3. y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}.$$

$$4. y = \operatorname{tg}^4(x^2 + 1).$$

$$5. y = (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2.$$

$$6. y = x - \operatorname{tg} x.$$

$$7. y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}.$$

$$8. y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}.$$

$$9. y = \ln^2 x.$$

$$10. y = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}.$$

$$11. y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$[y' = x^2 \cos x.]$$

$$\left[y' = \frac{1}{1 - \sin x}. \right]$$

$$\left[y' = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}. \right]$$

$$\left[y' = \frac{8x \operatorname{tg}^3(x^2 + 1)}{\cos^2(x^2 + 1)}. \right]$$

$$\left[y' = -\frac{16 \cos 2x}{\sin^3 2x}. \right]$$

$$[y' = -\operatorname{tg}^2 x.]$$

$$\left[y' = -\frac{4x - \sin 2x}{4x\sqrt{x} \cos^2 x}. \right]$$

$$\left[y' = -\frac{\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1 + \cos^2 x)^3}}. \right]$$

$$\left[y' = \frac{2 \ln x}{x}. \right]$$

$$\left[y' = \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x^2} - \frac{2}{x^2}. \right]$$

$$\left[y' = \frac{1}{\sin x}. \right]$$

12. $y = \ln x^2.$	$\left[y' = \frac{2}{x}. \right]$
13. $y = (x-1)e^x.$	$\left[y' = xe^x. \right]$
14. $y = (x^2 - 4x + 8)e^{\frac{x}{2}}.$	$\left[y' = \frac{x^2}{2}e^{\frac{x}{2}}. \right]$
15. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$	$\left[y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \right]$
16. $y = e^{x \ln x}.$	$\left[y' = e^{x \ln x} (1 + \ln x). \right]$
17. $y = x^2 2^x.$	$\left[y' = (2x + x^2 \ln 2) 2^x. \right]$
18. $y = e^{\sqrt{x}}.$	$\left[y' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}. \right]$
19. $y = \operatorname{tg}^3 2x \cos^2 2x.$	$\left[y' = 2 \operatorname{tg}^2 2x (3 - 2 \sin^2 2x). \right]$
20. $y = \ln (e^{-x} + xe^{-x}).$	$\left[y' = -\frac{x}{1+x}. \right]$
21. $y = \ln \frac{x^3 - 9}{x^3 - 1}.$	$\left[y' = \frac{24x^2}{(x^3 - 9)(x^3 - 1)}. \right]$
22. $y = 1 - \operatorname{arctg} x.$	$\left[y' = \frac{x^2}{1+x^2}. \right]$
23. $y = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x.$	$\left[y' = \sqrt{1-x^2}. \right]$
24. $y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$	$\left[y' = \frac{1}{1-x^4}. \right]$
25. $y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}.$	$\left[y' = -\frac{2}{(x+1)^2} \operatorname{ctg} \frac{2x+4}{x+1}. \right]$

Проверка выполнения контрольной работе. Контрольная работа проводится с целью контроля усвоенных умений и знаний и последующего анализа типичных ошибок и затруднений, обучающихся в конце изучения темы или раздела. Согласно календарно-тематическому плану дисциплины предусмотрено проведение контрольной работы.

Задание для контрольной работы

Вариант 1

- Исследовать систему уравнений на совместимость и определенность, не решая ее. Указать главные (базисные) и свободные переменные.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -9; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = -2; \\ -x_1 + x_2 + 9x_4 = -13; \\ -9x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 11x_4 = 3; \\ -15x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 9x_4 = 21. \end{cases}$$

2. Решить систем уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 13; \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 21; \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3. \end{cases}$$

3. Решить систему с помощью обратной матрицы и по формула Крамера.

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 17; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8. \end{cases}$$

4. Решить однородную систему уравнений. Указать общее решение и фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ -2x_1 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ -5x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

5. На биссектрисе первого координатного угла лежат точки $A(3; 3)$ и $B(x; y)$, расстояние между которыми равно $\sqrt{2}$. Найти координаты точки B .

6. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - y - 1 = 0$ и $3x - y + 4 = 0$ параллельно прямой $4x + 2y - 13 = 0$.

7. Найти угол между высотой AD и медианой AE в треугольнике с вершинам в точках $A(1; 3), B(4; -1), C(-1; 1)$.

8. Найти каноническое уравнение эллипса, если

- а) Расстояние между концами большой и малой оси равно 5, а сумма длин полуосей равна 7;

- б) Расстояния от его фокуса до концов большой оси равны 2 и 14.

9. Через фокус параболы $y^2 = -x$ проведена прямая под углом 135° к оси Ox . Найти длину образовавшейся хорды.

Вариант 2

1. Исследовать систему уравнений на совместность и определенность, не решая ее. Указать главные (базисные) и свободны переменные.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -3; \\ -2x_1 + 3x_2 - x_4 = 8; \\ 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0; \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 = -14; \\ -2x_1 - 2x_2 + 11x_3 + 18x_4 = -23. \end{cases}$$

2. Решить систем уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3; \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_4 = -3; \\ x_1 - 4x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$$

3. Решить систему с помощью обратной матрицы и по формула Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3; \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -11; \\ -4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -2. \end{cases}$$

4. Решить однородную систему уравнений. Указать общее решение и фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0; \\ -5x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0; \\ -4x_1 + 14x_2 - 8x_3 - 2x_4 = 0; \\ -x_1 + 10x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Дан треугольник ABC с вершинами $A(1; 5), B(4; 1), C(13; 10)$. Найти точку пересечения биссектрисы внутреннего угла A со стороной BC .

6. Прямая $y = kx + 4$ удалена от начала координат на расстояние $d = \sqrt{3}$. Найти значение k .

7. Даны последовательные вершины параллелограмма $ABCD : A(-2; 5), B(2; 7), C(-4; -3)$. Найти координаты четвертой вершины D и написать уравнение диагонали BD .

8. Найти уравнение прямой, содержащей диаметр окружности $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$, перпендикулярный прямой $x - 3y + 2 = 0$.

9. Найти уравнение гиперболы, зная, что ее эксцентриситет $\varepsilon = 2$, фокусы гиперболы совпадают с фокусом эллипса $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$.

Вариант 3

1. Исследовать систему уравнений на совместность и определенность, не решая ее. Указать главные (базисные) и свободны переменные.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 5; \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -11; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7; \\ 13x_1 - 7x_3 - 9x_4 = 35. \end{cases}$$

2. Решить систем уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -1; \\ -4x_1 + 13x_3 + x_4 = -10; \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6; \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -8. \end{cases}$$

3. Решить систему с помощью обратной матрицы и по формула Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -10; \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$$

4. Решить однородную систему уравнений. Указать общее решение и фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0; \\ 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0; \\ -9x_1 - 4x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Найти координаты центра и радиус окружности, проходящей через точку $A(-10; 4)$ и касающейся оси Ox в точке $B(-6; 0)$.

6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(-2; 1)$ на расстоянии 1 от начала координат.

7. При каких значениях A и C прямая $Ax + 3y + C = 0$:

- а) параллельна прямой $3x - y + 8 = 0$;
- б) перпендикулярна прямой $y = 5x$;
- в) проходит чрез точки $(2; 2)$ и $(-1; 4)$;
- г) пересекается с прямой $4x - 2y + 7 = 0$.

8. Найти площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $5x^2 + 9y^2 - 180 = 0$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

9. Найти длину диаметра эллипса (хорды, проходящей через центр эллипса) $9x^2 + 27y^2 = 255$, перпендикулярного к асимптоте гиперболы $x^2 - y^2 = 4$, проходящей через первую и третью четверти.

Вариант 4

1. Исследовать систему уравнений на совместность и определенность, не решая ее. Указать главные (базисные) и свободны переменные.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -12; \\ -5x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 4x_4 = -19; \\ -5x_1 + 10x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 47. \end{cases}$$

2. Решить систем уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2; \\ -5x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 12x_4 = -4; \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 12x_4 = -1; \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

3. Решить систему с помощью обратной матрицы и по формула Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 10; \\ -3x_1 + 3x_2 + 92 = 8; \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$$

4. Решить однородную систему уравнений. Указать общее решение и фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \\ -5x_1 + 11x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Площадь треугольника ABC с вершинами $A(-2; 1), B(2; 2), C(4; y)$ равна 15. Найти ординату вершины C .

6. Через точку пересечения прямых $2x - y = 0$ и $x + 3y - 1 = 0$ проведена прямая, перпендикулярная прямой $y = 3 - x$. Найти ее уравнение.

7. Даны две смежные вершины $A(-2; 4), B(2; 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $M(1; -1)$ пересечения его диагоналей. Найти уравнения сторон BC и CD параллелограмма.

8. Окружность проходит через точки $M_1(1; 5)$ и $M_2(5; 3)$, а центр ее лежит на прямой $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$. Найти уравнение окружности.

9. Дан эллипс $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$. Найти уравнение гиперболы, вершины которого находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах данного эллипса.

Сводная таблица по применяемым формам и методам текущего контроля и оценки результатов обучения

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания)	Формы и методы контроля и оценки результатов обучения
Освоенные умения:	
распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте;	Оценка правильности выполнения самостоятельной работы Решение задач во время занятия Контрольная работа
анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;	Оценка правильности выполнения самостоятельной работы Решение задач во время занятия Контрольная работа
определять этапы решения задачи;	Оценка правильности выполнения самостоятельной работы Решение задач во время занятия Контрольная работа
выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы;	Оценка правильности выполнения самостоятельной работы Решение задач во время занятия Контрольная работа

составить план действия; определить необходимые ресурсы;	Оценка правильности выполнения самостоятельной работы Решение задач во время занятия Контрольная работа
владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;	Оценка правильности выполнения самостоятельной работы Решение задач во время занятия Контрольная работа
реализовать составленный план;	Оценка правильности выполнения самостоятельной работы Решение задач во время занятия Контрольная работа
оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)	Оценка правильности выполнения самостоятельной работы Решение задач во время занятия Контрольная работа
определять задачи для поиска информации; определять необходимые источники информации; планировать процесс поиска;	Оценка правильности выполнения самостоятельной работы Решение задач во время занятия Контрольная работа
структурировать получаемую информацию;	Оценка правильности выполнения самостоятельной работы Решение задач во время занятия Контрольная работа
выделять наиболее значимое в перечне информации; оценивать практическую значимость результатов поиска; оформлять результаты поиска.	Оценка правильности выполнения самостоятельной работы Решение задач во время занятия Контрольная работа
Усвоенные знания:	
актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить	Контрольная работа Устный опрос во время занятия
основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте	Контрольная работа Устный опрос во время занятия
алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях	Контрольная работа Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия
методы работы в профессиональной и смежных сферах	Контрольная работа Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия
структуру плана для решения задач	Контрольная работа Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия
порядок оценки результатов решения задач профессиональной деятельности	Контрольная работа Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия

номенклатуры информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности;	Контрольная работа Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия
приемы структурирования информации;	Контрольная работа Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия
формат оформления результатов поиска информации.	Контрольная работа Устный опрос и выполнение практических заданий во время занятия

3.2 Форма промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация по дисциплине элементы высшей математики – экзамен, спецификация которого содержится в данном комплекте ФОС.

Обучающиеся допускаются к сдаче экзамена при выполнении всех видов самостоятельной работы, практических и контрольных работ, предусмотренных рабочей программой и календарно-тематическим планом дисциплины.

Перечень вопросов к экзамену

1. Операции над матрицами.
2. Специфические свойства операций над матрицами.
3. Транспортирование матриц. Свойства операции транспортирования.
4. Определители. Свойства определителей.
5. Теорема Лапласа.
6. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы.
7. Алгоритм построения обратной матрицы.
8. Единственность обратной матрицы.
10. Ранг матрицы.
11. Теорема Кронекера-Капелли.
12. Метод Гаусса.
13. Модель Леонтьева.
14. Числовая функция числового аргумента. Примеры. График функции. График обратной функции.
15. Способы задания функций. Арифметические операции над функциями.
16. Ограниченные и неограниченные функции. Геометрическое истолкование. Грани функции. Примеры.
17. Монотонные функции. Кусочно-монотонные функции. Геометрическое истолкование. Примеры.
18. Четные и нечетные функции. Теоремы о них. Примеры.
19. Периодические функции. Теоремы. Примеры.
20. Элементарные функции, их классификация.
21. Определение предела функции по Коши. Геометрический смысл. Теорема о единственности предела.
22. Определение предела функции по Гейне, его эквивалентность определению предела по Коши.
23. Локальные свойства функций, имеющих конечный предел.
24. Бесконечно малые функции. Теоремы о б.м.ф.
25. Бесконечно большие функции (б.б.ф.). Связь между б.б.ф. и б.м.ф. Связь между б.б.ф. и неограниченными функциями.
26. Сравнение б.м.ф. Критерий эквивалентности б.м.ф. Теорема о замене

- эквивалентных б.м.ф. Теорема об эквивалентности суммы б.м.ф.
27. Первый замечательный предел.
 28. Частичные пределы функции. Односторонние пределы. Теорема о частичных пределах и ее следствия.
 29. Теорема о пределе монотонной функции. Теорема Вейерштрасса о сходимости последовательности.
 30. Второй замечательный предел. Следствия.
 31. Обратная функция. Теорема о существовании непрерывной обратной функции.
 32. Степенная функция с натуральным показателем. Свойства. Степенная функция с целым отрицательным показателем. Свойства.
 33. Показательная функция на множестве действительных чисел. Свойства.
 34. Логарифмическая функция и ее свойства.
 35. Степенная функция с действительным показателем. Свойства.
 36. Тригонометрические функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Свойства.
 37. Тригонометрические функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. Свойства.
 38. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$. Свойства.
 39. Обратные тригонометрические функции $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$. Свойства.
 40. Понятие дифференцируемости функции. Производная и дифференциал. Геометрический и механический смысл производной. Теоремы о производной суммы, произведения и частного.
 41. Производная и дифференциал обратной и сложной функций. Инвариантность формы первого дифференциала.
 42. Параметрически заданные кривые и функции, их дифференцирование.
 43. Производные и дифференциалы высших порядков.
 44. Возрастание (убывание) функции в точке. Локальный экстремум.
 45. Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой в данной точке функции.
 46. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Следствия из теоремы Лагранжа (постоянство функции, имеющей на интервале равную нулю производную, условия монотонности функции на интервале, отсутствие разрывов первого рода и устранимых разрывов у производной).
 47. Обобщенная формула конечных приращений (теорема Коши).
 48. Раскрытие неопределенностей (правила Лопиталя).
 49. Признаки монотонности функции. Отыскание стационарных точек. Первое достаточное условие экстремума. Второе достаточное условие экстремума.
 50. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Необходимое условие перегиба. Первое достаточное условие перегиба. Второе достаточное условие перегиба.
 51. Асимптоты графика функции. Построение графика функции. Отыскание максимального и минимального значений функции, определенной сегменте.
 52. Понятие первообразной функции. Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла.
 53. Интегрирование методом заменой переменной.
 54. Интегрирование по частям.
 55. Формула Ньютона – Лейбница.
 56. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.

Перечень заданий к экзамену

1. Вычислите матрицу $D = A \cdot B + 2C^T$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

2. Вычислите матрицу $D = A \cdot B + 2C^T$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите матрицу $D = A \cdot B + 2C^T$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Вычислите матрицу $D = A \cdot B + 2C^T$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

6. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

7. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

9. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера;

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

10. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

11. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера;

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_3 = 4 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

12. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_3 = 4 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

13. Найти обратную матрицу A^{-1} к матрице A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

14. Найти обратную матрицу A^{-1} к матрице A

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

15. Найти обратную матрицу A^{-1} к матрице A

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

16. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями: .17.В пространстве заданы точки $C(1;2;3)$ и $D(3;4;5)$. Найти длину вектора $\overrightarrow{CD}$

18.Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 10x}$.

19. Решите систему уравнений методом Крамера
$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 5z = 23 \\ x + 7y - z = 5 \end{cases}$$

20. Решите методом Гаусса систему уравнений
$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

21. Найдите производную функции $y = \ln \frac{x^3 - 9}{x^3 - 1}$.

22. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2 порядка, найти все ее параметры, построить кривую. $9x^2 - 4y^2 - 90x - 8y + 185 = 0$.

23.Дана кривая. Привести к каноническому виду. Построить и определить вид кривой. $6x^2 + 25 - \sqrt{xy} + 2y^2 = 21$.

24. Выяснить вид кривой по общему уравнению, найти её параметры и положение в системе координат. Сделать рисунок. $3x^2 - 6y^2 - 12x - 108y - 492 = 0$.

25. Выясните, какие из данных уравнений являются уравнениями окружности, найдите центр окружности и её радиус: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ или $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 20 = 0$

26. Выясните, какие из данных уравнений являются уравнениями окружности, найдите центр окружности и её радиус: $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 40 = 0$ или $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

27. Выясните, какие из данных уравнений являются уравнениями окружности, найдите центр окружности и её радиус:

28. Напишите уравнение окружности, проходящей через три заданные точки $A(2; 0)$; $B(1; 1)$; $C(2; 2)$.

29. Вычислить область определения $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 7x + 10}$.

30. Вычислить область определения $f(x) = \arccos 3x$.

31. Вычислить область определения $f(x) = \sqrt[4]{x + 2} + \frac{1}{6\sqrt{1-x}}$.

32. Вычислить область определения $f(x) = \arcsin \frac{x}{2}$.

33. Вычислить область определения $f(x) = \log_3(x - 2)$.

34. Вычислить область определения $f(x) = \frac{1}{\ln(x+3)}$.

35. Вычислить область определения $f(x) = \sqrt{x - 7} + \sqrt{10 - x}$.

36. Найти производные функций $y = 5x^2 - 3x + 2$

37. Найти производные функций $y = \frac{2}{x^3 - 1}$

38. Найти производные функций $y = e^{3x}$

39. Найти производные функций $y = \sqrt{2 - 3x}$

40. Найти производные функций, используя теоремы дифференцирования
 $y = x^2 \cdot \ln 3x$

41. Найти производные функций, используя теоремы дифференцирования
 $y = \frac{3x}{x^2 + 1}$

42. Вычислите $y = \cos 3x + 2 \sin^2 x$.

43. Вычислите $y = 5^{3x} + \log_2 x$

44. Найти третью производную функций ($y''' = ?$) а) $y = \sin 2x$

45. Найти третью производную функций ($y''' = ?$) $y = \cos 3x$

46. Вычислите интеграл $\int \frac{dx}{2x^3}$
47. Вычислите интеграл $\int \sqrt[3]{x^2} dx$
48. Вычислите интеграл $\int \frac{dx}{5^x}$
49. Вычислите интеграл $\int 3^{2x+1} dx$
50. Найти интегралы методом замены переменной: $\int \sqrt[2]{2+x} dx$
51. Найти интегралы методом замены переменной $\int \frac{dx}{2x-1}$
52. Найти интегралы методом замены переменной $\int e^{-3x+5} dx$
53. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям $\int 2xe^{-3x} dx$;
54. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям $\int 2x \ln x dx$.
55. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям $\int xe^{5x} dx$;
56. В классе 25 учеников. Сколькими способами можно из них выбрать 4 учащихся для дежурства?
57. Сколько вариантов трехзначного цифрового кода существует?
58. В контексте 2 буквы белого цвета, 2 буквы синего цвета и 1 буква желтого цвета. Сколькими способами можно выбрать 3 буквы (порядок выбора не важен)?
59. Сколькими способами можно составить букет из 7 цветов, если в вашем распоряжении 15 цветов?
60. Сколькими способами можно составить список из 6 фильмов?

4. Система оценивания комплекта ФОС текущего контроля и промежуточной аттестации

Каждый вид работы оценивается по пяти бальной шкале.

«5» (отлично) – за глубокое и полное овладение содержанием учебного материала, в котором обучающийся свободно и уверенно ориентируется; за умение практически применять теоретические знания, высказывать и обосновывать свои суждения. Оценка «5» (отлично) предполагает грамотное и логичное изложение ответа.

«4» (хорошо) – если обучающийся полно освоил учебный материал, владеет научно-понятийным аппаратом, ориентируется в изученном материале, осознанно применяет теоретические знания на практике, грамотно излагает ответ, но содержание и форма ответа имеют отдельные неточности.

«3» (удовлетворительно) – если обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений учебного материала, но излагает его неполно, непоследовательно, допускает неточности в применении теоретических знаний при ответе на практико-ориентированные вопросы; не умеет доказательно обосновать собственные суждения.

«2» (неудовлетворительно) – если обучающийся имеет разрозненные, бессистемные знания, допускает ошибки в определении базовых понятий, искажает их смысл; не может практически применять теоретические знания.

Критерии оценивания ответа по устному опросу.

«5» (отлично) – за глубокое и полное овладение содержанием учебного материала, в котором обучающийся свободно и уверенно ориентируется; за умение практически применять теоретические знания, высказывать и обосновывать свои суждения; за грамотное и логичное изложение ответа.

«4» (хорошо) – если обучающийся полно освоил учебный материал, владеет научно-понятийным аппаратом, ориентируется в изученном материале, осознанно

применяет теоретические знания на практике, грамотно излагает ответ, но содержание и форма ответа имеют отдельные неточности.

«3» (удовлетворительно) – если обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений учебного материала, но излагает его неполно, непоследовательно, допускает неточности в применении теоретических знаний при ответе на практико-ориентированные вопросы; не умеет доказательно обосновать собственные суждения.

«2» (неудовлетворительно) – если обучающийся имеет разрозненные, бессистемные знания, допускает ошибки в определении базовых понятий, искажает их смысл; не может практически применять теоретические знания.

Критерии оценивания опорных конспектов.

«5» (отлично) – аккуратность выполнения, читаемость текста, грамотность (терминологическая и орфографическая), полное раскрытие темы конспекта.

«4» (хорошо) – тема конспекта раскрыта, однако материал изложен недостаточно логично; аккуратность выполнения, читаемость конспекта, грамотность (терминологическая и орфографическая).

«3» (удовлетворительно) – материал изложен недостаточно логично, неаккуратное выполнение, читаемость конспекта, грамотность (терминологическая и орфографическая), тема конспекта раскрыта не в полной мере.

«2» (неудовлетворительно) – материал изложен нелогично, допущены терминологические и орфографические ошибки, неразборчивый почерк, тема конспекта не раскрыта.

Критерии оценивания заданий практических работ.

Практическая работа оценивается максимально оценкой «5» (отлично).

Каждое задание оценивается максимально оценкой «5» (отлично).

По результатам оценивания всех заданий оценка соответствует средней.

Критерии оценивания решений задач.

«5» (отлично) – составлен правильный алгоритм решения задачи, в логическом рассуждении, в выборе нормативных источников и решении нет ошибок, получен верный ответ, задача решена рациональным способом.

«4» (хорошо) – составлен правильный алгоритм решения задачи, в логическом рассуждении и решении нет существенных ошибок; правильно сделан выбор нормативных источников; есть объяснение решения, но задача решена нерациональным способом или допущено не более двух несущественных ошибок, получен верный ответ.

«3» (удовлетворительно) – задание выполнено, в логическом рассуждении нет существенных ошибок, но допущены существенные ошибки в выборе нормативных источников; задача решена не полностью или в общем виде.

«2» (неудовлетворительно) – задача решена неправильно.

Критерии оценивания контрольной работы

Задание к контрольной работе состоит из двух задач, каждая из которых оценивается максимально оценкой «5» (отлично). По результатам оценивания решения двух задач оценка соответствует средней.

Критерии оценивания ответов по экзаменационным билетам.

1. Оценка "отлично" предполагает: •

Полные и точные ответы на 3 вопроса экзаменационного билета Свободное владение основными терминами и понятиями курса. Последовательное и логичное изложение материала курса. Законченные выводы и обобщения по теме вопросов. Исчерпывающие ответы на вопросы при сдаче экзамена.

2. Оценка "хорошо" предполагает

Полные и точные ответы на 3 вопроса экзаменационного билета • Знание основных терминов и понятий курса. Последовательное изложение материала курса. Умение

формулировать некоторые обобщения по теме вопросов. Достаточно полные ответы на вопросы при сдаче экзамена.

3. Оценка "удовлетворительно" предполагает:

Полные и точные ответы на 2 вопроса экзаменационного билета. Удовлетворительное знание основных терминов и понятий курса. Удовлетворительное знание и владение методами и средствами решения задач. Недостаточно последовательное изложение материала курса. Умение формулировать отдельные выводы и обобщения по теме вопросов.

4. Оценка "неудовлетворительно" предполагает:

Полный и точный ответ на 1 вопроса экзаменационного билета.